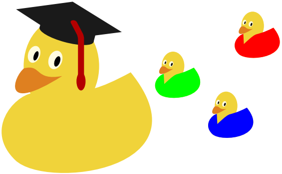
5. predavanje: Kompozicije i inverzi. Eksponencijalne funkcije.

Franka Miriam Brückler



Kompozicija funkcija

Primjer

f =*mikser*; g =*pećnica*; x =*sastojci za kolač*;
$f(x)$ =*izmiksani sastojci*, $g \circ f(x) = g(f(x))$ =*pečeni kolač*
$g(x)$=*specčeni sastojci*, $f \circ g(x) = f(g(x))$ =*izmiksani pečeni sastojci*

Kompozicija funkcija

Primjer

f =mikser; g =pećnica; x =sastojci za kolač;
$f(x)$ =izmiksani sastojci, $g \circ f(x) = g(f(x))$ =pečeni kolač
$g(x)$=spečeni sastojci, $f \circ g(x) = f(g(x))$ =izmiksani pečeni sastojci

Zadatak

Ako je $f : D \to K$ i $g : D' \to K'$, uz koji(e) uvjet(e) na skupove D, D', K, K' kompozicija $f \circ g$ ima smisla?

Kompozicija funkcija

Primjer

f =mikser; g =pećnica; x =sastojci za kolač;
$f(x)$ =izmiksani sastojci, $g \circ f(x) = g(f(x))$ =pečeni kolač
$g(x)$=spečeni sastojci, $f \circ g(x) = f(g(x))$ =izmiksani pečeni sastojci

Zadatak

Ako je $f : D \to K$ i $g : D' \to K'$, uz koji(e) uvjet(e) na skupove D, D', K, K' kompozicija $f \circ g$ ima smisla?

Zadatak

Otopina ima poznatu koncentraciju c i volumen V. Opišite računanje masa otopljene tvari poznatog sastava (poznate molarne mase M) kao kompoziciju dviju funkcija!

Zadatak

Što je kompozicija zrcalne simetrije sa samom sobom?

Zadatak

Što je kompozicija zrcalne simetrije sa samom sobom?

Zadatak

Nađite primjer funkcija $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takvih da je* $f \circ g = g \circ f$ *i pritom ni* f *ni* g *nije identiteta.*

Zadatak

Neka je f *rotacija ravnine za pravi kut oko točke* O *u pozitivnom smjeru, a* g *zrcaljenjenje (osna simetrija) s obzirom na neki pravac kroz* O. *Je li* $f \circ g = g \circ f$?

Zadatak

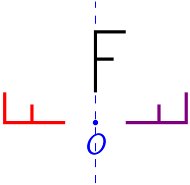
Što je kompozicija zrcalne simetrije sa samom sobom?

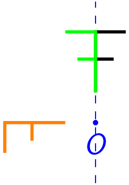
Zadatak

Nađite primjer funkcija $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takvih da je* $f \circ g = g \circ f$ *i pritom ni* f *ni* g *nije identiteta.*

Zadatak

Neka je f *rotacija ravnine za pravi kut oko točke* O *u pozitivnom smjeru, a* g *zrcaljenjenje (osna simetrija) s obzirom na neki pravac kroz* O*. Je li* $f \circ g = g \circ f$*?*





Inverzi funkcija

Da bi funkcija bila invertibilna, ona mora biti

Inverzi funkcija

Da bi funkcija bila invertibilna, ona mora biti bijekcija, što znači

Inverzi funkcija

Da bi funkcija bila invertibilna, ona mora biti bijekcija, što znači injekcija i surjekcija.

$$y = f(x) \leftrightsquigarrow x = f^{-1}(y)$$

Inverzna funkcija rekonstruira originalnu nezavisnu varijablu iz zavisne.

Zadatak

Što je inverzna funkcija za rotaciju prostora za pravi kut u pozitivnom smjeru oko vertikalne osi?

Inverzi funkcija

Da bi funkcija bila invertibilna, ona mora biti bijekcija, što znači injekcija i surjekcija.

$$y = f(x) \leftrightsquigarrow x = f^{-1}(y)$$

Inverzna funkcija rekonstruira originalnu nezavisnu varijablu iz zavisne.

Zadatak

Što je inverzna funkcija za rotaciju prostora za pravi kut u pozitivnom smjeru oko vertikalne osi?

Zadatak

Na primjeru funkcije kvadriranja kao funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ objasnite zašto nam za invertibilnost trebaju baš ta dva svojstva.

Inverzi funkcija

Da bi funkcija bila invertibilna, ona mora biti bijekcija, što znači injekcija i surjekcija.

$$y = f(x) \leftrightsquigarrow x = f^{-1}(y)$$

Inverzna funkcija rekonstruira originalnu nezavisnu varijablu iz zavisne.

Zadatak

Što je inverzna funkcija za rotaciju prostora za pravi kut u pozitivnom smjeru oko vertikalne osi?

Zadatak

Na primjeru funkcije kvadriranja kao funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ objasnite zašto nam za invertibilnost trebaju baš ta dva svojstva.

Zadatak

Koja funkcija je inverzna funkcija kubiranja?

Zadatak

Provjerite bijektivnost i nađite inverz funkcije

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Zadatak

Provjerite bijektivnost i nađite inverz funkcije

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Zadatak

Nađite dva primjera realnih funkcija jedne varijable koje su same sebi inverzne.

Zadatak

Provjerite bijektivnost i nađite inverz funkcije

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Zadatak

Nađite dva primjera realnih funkcija jedne varijable koje su same sebi inverzne.

Zadatak

Ako je graf invertibilne funkcije f prikazan u Kartezijevom koordinatnom sustavu, kako izgleda graf od f^{-1}? Vrijedi li ista tvrdnja za opći pravokutni kordinatni sustav?

Zadatak

Provjerite bijektivnost i nađite inverz funkcije

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Zadatak

Nađite dva primjera realnih funkcija jedne varijable koje su same sebi inverzne.

Zadatak

Ako je graf invertibilne funkcije f prikazan u Kartezijevom koordinatnom sustavu, kako izgleda graf od f^{-1}? Vrijedi li ista tvrdnja za opći pravokutni kordinatni sustav?

Zadatak

Može li inverz rastuće funkcije biti padajuća funkcija?

Eskponencijalne funkcije

Želite posuditi ili dići kredit u iznosu $K = 1\,\mathrm{k€}$ u trajanju od $t = 5$ godina i uspoređujete ponude.
Jedan znanac Vam je ponudio da će Vam posuditi K na vrijeme T, pri čemu ćete mu na kraju svake godine platiti $p = 5\,\%$ glavnice kao kamate. Dakle, ukupno ćete mu vratiti

Eskponencijalne funkcije

Želite posuditi ili dići kredit u iznosu $K = 1\,\text{k€}$ u trajanju od $t = 5$ godina i uspoređujete ponude.
Jedan znanac Vam je ponudio da će Vam posuditi K na vrijeme T, pri čemu ćete mu na kraju svake godine platiti $p = 5\,\%$ glavnice kao kamate. Dakle, ukupno ćete mu vratiti $K + 5 \cdot 5\,\% \cdot K = 1{,}25\,\text{k€}$, odnosno ova posudba bi Vas koštala 250 eura.
Iznos kamata kao funkcija vremena je ovdje linearna funkcija:

$$k_1(t) = K\,p\,\frac{t}{\text{god.}}.$$

Eskponencijalne funkcije

Želite posuditi ili dići kredit u iznosu $K = 1\,\mathrm{k€}$ u trajanju od $t = 5$ godina i uspoređujete ponude.
Jedan znanac Vam je ponudio da će Vam posuditi K na vrijeme T, pri čemu ćete mu na kraju svake godine platiti $p = 5\,\%$ glavnice kao kamate. Dakle, ukupno ćete mu vratiti $K + 5 \cdot 5\,\% \cdot K = 1{,}25\,\mathrm{k€}$, odnosno ova posudba bi Vas koštala 250 eura.
Iznos kamata kao funkcija vremena je ovdje linearna funkcija:

$$k_1(t) = K\,p\,\frac{t}{\text{god.}}.$$

Vaša banka Vam pak nudi istu kamatnu stopu p, ali će primijeniti uzastopno ukamaćivanje, tj. na kraju godine će kamate postati dio glavnice. U ovom slučaju ćete morati ukupno vratiti

Eskponencijalne funkcije

Želite posuditi ili dići kredit u iznosu $K = 1\,\text{k€}$ u trajanju od $t = 5$ godina i uspoređujete ponude.
Jedan znanac Vam je ponudio da će Vam posuditi K na vrijeme T, pri čemu ćete mu na kraju svake godine platiti $p = 5\,\%$ glavnice kao kamate. Dakle, ukupno ćete mu vratiti $K + 5 \cdot 5\,\% \cdot K = 1{,}25\,\text{k€}$, odnosno ova posudba bi Vas koštala 250 eura.
Iznos kamata kao funkcija vremena je ovdje linearna funkcija:

$$k_1(t) = K\,p\,\frac{t}{\text{god.}}.$$

Vaša banka Vam pak nudi istu kamatnu stopu p, ali će primijeniti uzastopno ukamaćivanje, tj. na kraju godine će kamate postati dio glavnice. U ovom slućaju ćete morati ukupno vratiti
$K \cdot 1{,}05^5 = 1276{,}28$ €, tj. taj kredit bi Vas koštao 276,28 eura.
Iznos kamata kao funkcija vremena je ovdje funkcija:

$$k_2(t) = K \cdot (1+p)^{\frac{t}{\text{god.}}}.$$

$$k_2(t) = K \cdot (1 + p)^{\frac{t}{\text{god.}}}.$$

Druga banka Vam nudi kao prethodna, ali bi Vam kamate obračunavala popola svakih pola godine.

$$k_2(t) = K \cdot (1+p)^{\frac{t}{\text{god.}}}.$$

Druga banka Vam nudi kao prethodna, ali bi Vam kamate obračunavala popola svakih pola godine. Dakle, njemu biste ukupno trebali vratiti $K \cdot 1{,}025^1 0 = 1{,}28008\,\mathrm{k€}$. Općenito, ovdje bi funkcija kamata bila

$$k_3(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{\frac{2t}{\text{god.}}} = K \cdot \left(\left(1 + \frac{p}{2}\right)^2\right)^{\frac{t}{\text{god.}}}$$

$$k_2(t) = K \cdot (1+p)^{\frac{t}{\text{god.}}}.$$

Druga banka Vam nudi kao prethodna, ali bi Vam kamate obračunavala popola svakih pola godine. Dakle, njemu biste ukupno trebali vratiti $K \cdot 1{,}025^1 0 = 1{,}28008\,\text{k€}$. Općenito, ovdje bi funkcija kamata bila

$$k_3(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{\frac{2t}{\text{god.}}} = K \cdot \left(\left(1 + \frac{p}{2}\right)^2\right)^{\frac{t}{\text{god.}}}$$

Kako bi izgledala funkcija kamata ako bi se kamate obračunavale mjesečno?

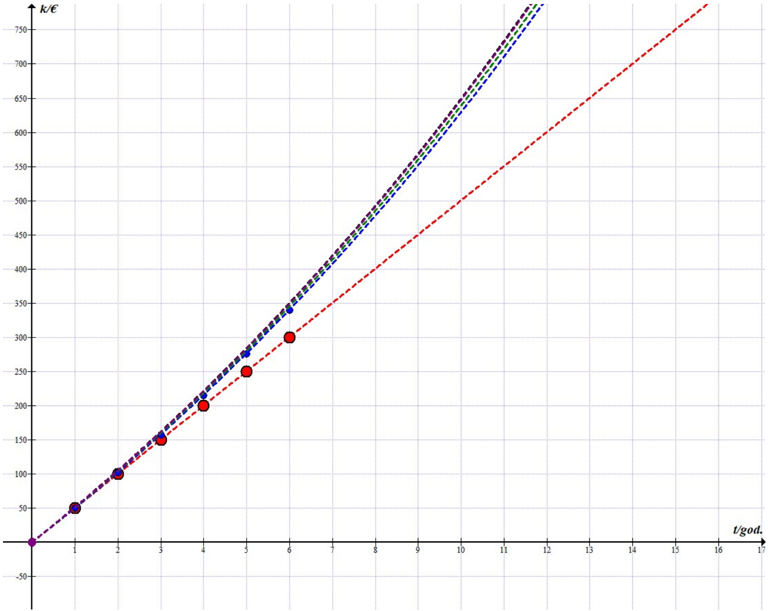
$$k_2(t) = K \cdot (1+p)^{\frac{t}{\text{god.}}}.$$

Druga banka Vam nudi kao prethodna, ali bi Vam kamate obračunavala popola svakih pola godine. Dakle, njemu biste ukupno trebali vratiti $K \cdot 1{,}025^1 0 = 1{,}28008\,\text{k€}$. Općenito, ovdje bi funkcija kamata bila

$$k_3(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{\frac{2t}{\text{god.}}} = K \cdot \left(\left(1+\frac{p}{2}\right)^2\right)^{\frac{t}{\text{god.}}}$$

Kako bi izgledala funkcija kamata ako bi se kamate obračunavale mjesečno?

$$k_4(t) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{\frac{12t}{\text{god.}}} = K \cdot \left(\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12}\right)^{\frac{t}{\text{god.}}}$$


k/€
t/god.
750
700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
-50
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

Uz $a = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$, vidimo da kod uzastopnog ukamaćivanja s n puta godišnjim obračunom kamata po jedinici iznosa kredita iznos koji se vraća eksponencijalna funkcija s bazom a kojoj je nezavisna varijabla $x = t/\text{god.}$:

$$k(x) = a^x.$$

Uz $a = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$, vidimo da kod uzastopnog ukamaćivanja s n puta godišnjim obračunom kamata po jedinici iznosa kredita iznos koji se vraća eksponencijalna funkcija s bazom a kojoj je nezavisna varijabla $x = t/\text{god.}$:

$$k(x) = a^x.$$

U ovim slučajevima je $a > 1$ pa je funkcija k uvijek

Uz $a = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$, vidimo da kod uzastopnog ukamaćivanja s n puta godišnjim obračunom kamata po jedinici iznosa kredita iznos koji se vraća eksponencijalna funkcija s bazom a kojoj je nezavisna varijabla $x = t/\text{god.}$:

$$k(x) = a^x.$$

U ovim slučajevima je $a > 1$ pa je funkcija k uvijek rastuća. Ako bismo povećavali broj n, iznos a bio bi sve bliži iznosu baze prirodnog logaritma e$\approx$ 2,718281828. Eksponencijalnu funkciju s bazom e umjesto s e^x često zapisujemo s $\exp(x)$.

Zadatak

Opišite uzastopno deseterostruko razrjeđivanje vodene otopine početne koncentracije $1\,\text{mol/L}$ *kao funkciju broja razrjeđivanja.*

Uz $a = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$, vidimo da kod uzastopnog ukamaćivanja s n puta godišnjim obračunom kamata po jedinici iznosa kredita iznos koji se vraća eksponencijalna funkcija s bazom a kojoj je nezavisna varijabla $x = t/\text{god.}$:

$$k(x) = a^x.$$

U ovim slučajevima je $a > 1$ pa je funkcija k uvijek rastuća. Ako bismo povećavali broj n, iznos a bio bi sve bliži iznosu baze prirodnog logaritma e$\approx 2{,}718281828$. Eksponencijalnu funkciju s bazom e umjesto s e^x često zapisujemo s $\exp(x)$.

Zadatak

Opišite uzastopno deseterostruko razrjeđivanje vodene otopine početne koncentracije $1\,\mathrm{mol/L}$ *kao funkciju broja razrjeđivanja. Je li to eksponencijalna funkcija?*

Uz $a = \left(1+\frac{p}{n}\right)^n$, vidimo da kod uzastopnog ukamaćivanja s n puta godišnjim obračunom kamata po jedinici iznosa kredita iznos koji se vraća eksponencijalna funkcija s bazom a kojoj je nezavisna varijabla $x = t/\text{god.}$:

$$k(x) = a^x.$$

U ovim slučajevima je $a > 1$ pa je funkcija k uvijek rastuća. Ako bismo povećavali broj n, iznos a bio bi sve bliži iznosu baze prirodnog logaritma e$\approx$ 2,718281828. Eksponencijalnu funkciju s bazom e umjesto s e^x često zapisujemo s $\exp(x)$.

Zadatak

Opišite uzastopno deseterostruko razrjeđivanje vodene otopine početne koncentracije 1 mol/L *kao funkciju broja razrjeđivanja. Je li to eksponencijalna funkcija? Je li rastuća ili padajuća?*

Uz $a = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$, vidimo da kod uzastopnog ukamaćivanja s n puta godišnjim obračunom kamata po jedinici iznosa kredita iznos koji se vraća eksponencijalna funkcija s bazom a kojoj je nezavisna varijabla $x = t/\text{god.}$:

$$k(x) = a^x.$$

U ovim slučajevima je $a > 1$ pa je funkcija k uvijek rastuća. Ako bismo povećavali broj n, iznos a bio bi sve bliži iznosu baze prirodnog logaritma e$\approx$ 2,718281828. Eksponencijalnu funkciju s bazom e umjesto s e^x često zapisujemo s $\exp(x)$.

Zadatak

Opišite uzastopno deseterostruko razrjeđivanje vodene otopine početne koncentracije 1 mol/L *kao funkciju broja razrjeđivanja. Je li to eksponencijalna funkcija? Je li rastuća ili padajuća?*

U prethodnim primjerima eksponencijalne funkcije nisu bile razmatrane na čitavoj prirodnoj domeni.

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?
- Zašto 0 i 1 ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?
- Zašto 0 i 1 ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Zašto negativne brojeve ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?
- Zašto 0 i 1 ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Zašto negativne brojeve ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Za kakve baze su eksponencijalne funkcije rastuće, a za kakve su padajuće?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera"?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?
- Zašto 0 i 1 ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Zašto negativne brojeve ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Za kakve baze su eksponencijalne funkcije rastuće, a za kakve su padajuće?
- Koje su moguće vrijednosti eksponencijalnih funkcija u 0?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?
- Zašto 0 i 1 ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Zašto negativne brojeve ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Za kakve baze su eksponencijalne funkcije rastuće, a za kakve su padajuće?
- Koje su moguće vrijednosti eksponencijalnih funkcija u 0?
- Koja je bitna razlika horizontalne asimptote kod racionalnih i kod eskponencijalnih funkcija?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?
- Zašto 0 i 1 ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Zašto negativne brojeve ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Za kakve baze su eksponencijalne funkcije rastuće, a za kakve su padajuće?
- Koje su moguće vrijednosti eksponencijalnih funkcija u 0?
- Koja je bitna razlika horizontalne asimptote kod racionalnih i kod eskponencijalnih funkcija?
- Jesu li eksponencijalne funkcije parne? Neparne? Injekcije? Surjekcije?

Po definiciji, prirodna domena svake eksponencijalne funkcije je $\mathbb{R}$.

- Je li prikladno reći „a je koeficijent smjera“?
- Koje su dozvoljene baze za eskponencijalne funkcije?
- Zašto 0 i 1 ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Zašto negativne brojeve ne dozvoljavamo kao baze eksponencijalnih funkcija?
- Za kakve baze su eksponencijalne funkcije rastuće, a za kakve su padajuće?
- Koje su moguće vrijednosti eksponencijalnih funkcija u 0?
- Koja je bitna razlika horizontalne asimptote kod racionalnih i kod eskponencijalnih funkcija?
- Jesu li eksponencijalne funkcije parne? Neparne? Injekcije? Surjekcije?
- Zašto svaku (ne)jednadžbu možemo podijeliti s $\exp(-2x+x^2)$, bez ikakvih dodatnih uvjeta?
- Je li $f(x) = 3^{-5x}$ eksponencijalna funkcija?

Zadatak

Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

- $f(x) = A \cdot \exp(-k\,x)$, *gdje su* A *i* k *pozitivne konstante.*

Zadatak

Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

- $f(x) = A \cdot \exp(-k\,x)$, *gdje su* A *i* k *pozitivne konstante.*
- $g(x) = 1 - 2 \cdot 10^{x-5}$ *na domeni* $[0, 1]$.

Zadatak

Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

- $f(x) = A \cdot \exp(-k\,x)$, *gdje su* A *i* k *pozitivne konstante.*
- $g(x) = 1 - 2 \cdot 10^{x-5}$ *na domeni* $[0, 1]$.
- *Atomska 1s-orbitala je funkcija koja točki prostora (poziciji elektrona) pridružuje iznos*

$$\sqrt{\frac{Z^3}{a_0^3 \pi}} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right),$$

gdje je r *udaljenost elektrona do jezgre. Skicirajte ovisnost 1s-orbitale o* r.

Zadatak

Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

- $f(x) = A \cdot \exp(-k\,x)$, *gdje su* A *i* k *pozitivne konstante.*
- $g(x) = 1 - 2 \cdot 10^{x-5}$ *na domeni* $[0, 1]$.
- *Atomska 1s-orbitala je funkcija koja točki prostora (poziciji elektrona) pridružuje iznos*

$$\sqrt{\frac{Z^3}{a_0^3 \pi}} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right),$$

gdje je r *udaljenost elektrona do jezgre. Skicirajte ovisnost 1s-orbitale o* r.

Za sljedeće predavanje pročitajte odjeljke 2.6.2. Logaritamske funkcije, 2.6.3. Opća potencija, 2.6.4. Hiperbolne funkcije. Treći kratki test postat će aktivan danas u tijeku dana i biti otvoren do 6:00 sati na dan sljedećeg predavanja.