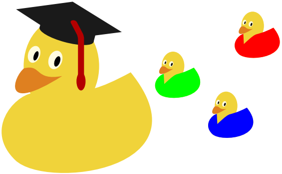
9. predavanje: Neke neelementarne funkcije. Linearizacija.

Franka Miriam Brückler



Neke neelementarne funkcije

- Koja je najpoznatija neelementarna funkcija, kako se definira i kako izgleda njezin graf?

Neke neelementarne funkcije

- Koja je najpoznatija neelementarna funkcija, kako se definira i kako izgleda njezin graf?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln|x|$.

Neke neelementarne funkcije

- Koja je najpoznatija neelementarna funkcija, kako se definira i kako izgleda njezin graf?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija jedne varijable. Ako joj je domenu D moguće rastaviti na disjunktne dijelove A, B, $\ldots$, tako da se elementi od A preslikavaju po pravilu elementarne funkcije f_A, elementi od B po pravilu druge elementarne funkcije f_B itd., kažemo da je f zadana po dijelovima i pišemo

$$f(x) = \begin{cases} f_A(x), & x \in A \\ f_B(x), & x \in B \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x \leq e \\ \frac{x}{e} & e < x < 2e \end{cases}$$

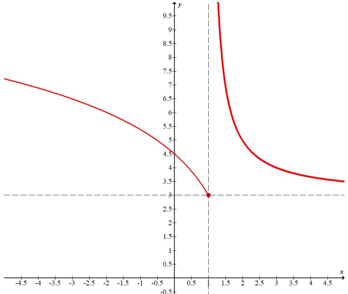
Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x \leq e \\ \frac{x}{e} & e < x < 2e \end{cases}$$

Zadatak

Nađite formulu funkcije čiji graf je prikazan na slici dolje.



Linearizacija neafinih funkcija

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = a\,x + b$, gdje su x i y jednoznačno povezane s X i Y.
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y, $\psi : [a, b] \to K$ mora biti

Linearizacija neafinih funkcija

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y jednoznačno povezane s X i Y.
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y, $\psi : [a, b] \to K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena

Linearizacija neafinih funkcija

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = a\,x + b$, gdje su x i y jednoznačno povezane s X i Y.
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y, $\psi : [a, b] \to K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f.

Primjer (Arrheniusova jednadžba)

$$k = A \exp\left(-\frac{E_\mathrm{a}}{RT}\right),; \qquad R = 8{,}3145\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$$

Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A?

Linearizacija neafinih funkcija

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y jednoznačno povezane s X i Y.
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y, $\psi : [a, b] \to K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f.

Primjer (Arrheniusova jednadžba)

$$k = A \exp\left(-\frac{E_\mathrm{a}}{RT}\right),; \qquad R = 8{,}3145\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$$

Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A? Ako je A u s^{-1}:

$$y = \ln(k \cdot \mathrm{s}), \quad x = \frac{\mathrm{K}}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R \cdot \mathrm{K}}, \quad b = \ln(A \cdot \mathrm{s})$$

Linearizacija neafinih funkcija

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y jednoznačno povezane s X i Y.
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y, $\psi : [a, b] \to K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f.

Primjer (Arrheniusova jednadžba)

$$k = A \exp\left(-\frac{E_\mathrm{a}}{RT}\right), ; \qquad R = 8{,}3145\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$$

Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A? Ako je A u s^{-1}:

$$y = \ln(k \cdot \mathrm{s}), \quad x = \frac{\mathrm{K}}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R \cdot \mathrm{K}}, \quad b = \ln(A \cdot \mathrm{s})$$

$T_1 \leq T \leq T_2$:

Linearizacija neafinih funkcija

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = a\,x + b$, gdje su x i y jednoznačno povezane s X i Y.
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y, $\psi : [a, b] \to K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f.

Primjer (Arrheniusova jednadžba)

$$k = A \exp\left(-\frac{E_\mathrm{a}}{RT}\right),; \qquad R = 8{,}3145\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$$

Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A? Ako je A u s^{-1}:

$$y = \ln(k\cdot\mathrm{s}), \quad x = \frac{\mathrm{K}}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R\cdot\mathrm{K}}, \quad b = \ln(A\cdot\mathrm{s})$$

$T_1 \leq T \leq T_2$:$\frac{\mathrm{K}}{T_2} = x_1 \leq x \leq x_2 = \frac{\mathrm{K}}{T_1}$;

Linearizacija neafinih funkcija

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = a\,x + b$, gdje su x i y jednoznačno povezane s X i Y.
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y, $\psi : [a, b] \to K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f.

Primjer (Arrheniusova jednadžba)

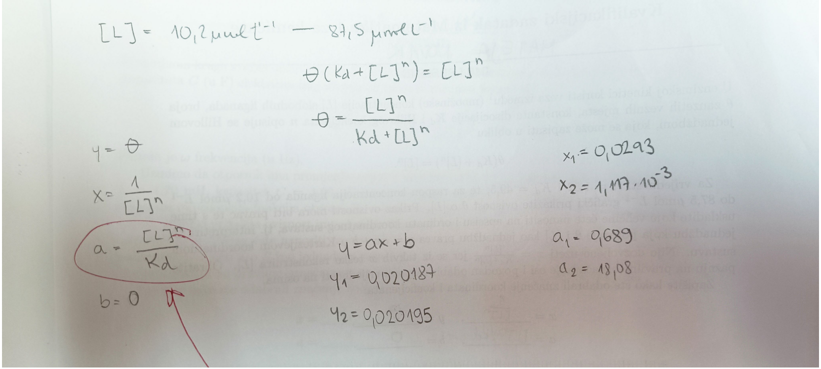
$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), ; \qquad R = 8{,}3145\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$$

Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A? Ako je A u s^{-1}:

$$y = \ln(k \cdot \mathrm{s}), \quad x = \frac{\mathrm{K}}{T}, \quad a = -\frac{E_a}{R \cdot \mathrm{K}}, \quad b = \ln(A \cdot \mathrm{s})$$

$T_1 \leq T \leq T_2 : \frac{\mathrm{K}}{T_2} = x_1 \leq x \leq x_2 = \frac{\mathrm{K}}{T_1}$;
$y_1 = a\,x_2 + b \geq y \geq y_2 = a\,x_1 + b$

Nađite greške u ovom pokušaju linearizacije ovisnosti θ o $[L]$:



Još jedan primjer

Ostwaldov zakon opisuje ovisnost molarnu provodnostu slabog elektrolita o njegovoj koncentraciji:

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c\,\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}.$$

Pritom je Λ_m molarna provodnost elektrolita (u S cm^2 mol^{-1}), Λ_m° je tzv. granična molarna provodnost (konstanta za promatrani elektrolit pri fiksnoj temperaturi), K je konstanta disocijacije slabog elektrolita (u mol cm^{-3}). Linearizirajte Ostwaldov zakon!

Još jedan primjer

Ostwaldov zakon opisuje ovisnost molarnu provodnostu slabog elektrolita o njegovoj koncentraciji:

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda^\circ_\mathrm{m}} + \frac{c\,\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda^\circ_\mathrm{m})^2}.$$

Pritom je Λ_m molarna provodnost elektrolita (u S cm^2 mol^{-1}), Λ°_m je tzv. granična molarna provodnost (konstanta za promatrani elektrolit pri fiksnoj temperaturi), K je konstanta disocijacije slabog elektrolita (u mol cm^{-3}). Linearizirajte Ostwaldov zakon!

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} = \frac{1}{\Lambda_m\Lambda_m^\circ} + \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2} : y = \frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m\Lambda_m^\circ}; x = c, b = 0, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}?!$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c\,\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}\ :$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}, x = c\Lambda_m\cdot\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}\cdot\frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}.$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda^\circ_\mathrm{m}} + \frac{c\,\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda^\circ_\mathrm{m})^2}:$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}, x = c\Lambda_m\cdot\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda^\circ_m)^2}\cdot\frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda^\circ_m}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}.$$

Ako imamo molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti $\Lambda^\circ_m = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c\,\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}:$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}, x = c\Lambda_m\cdot\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}\cdot\frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}.$$

Ako imamo molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti $\Lambda_m^\circ = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

$$a = 0{,}37435, \quad b = 2{,}5595 \cdot 10^{-3},$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c\,\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}:$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}, x = c\Lambda_m\cdot\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}\cdot\frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}.$$

Ako imamo molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti $\Lambda_m^\circ = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

$$a = 0{,}37435, \quad b = 2{,}5595 \cdot 10^{-3},$$

$$y_1 = \frac{1}{47} \approx 0{,}02128, \quad y_2 = \frac{1}{19} \approx 0{,}05263.$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda^\circ_\mathrm{m}} + \frac{c\,\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda^\circ_\mathrm{m})^2}:$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}, x = c\Lambda_m\cdot\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda^\circ_m)^2}\cdot\frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda^\circ_m}\cdot\frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}.$$

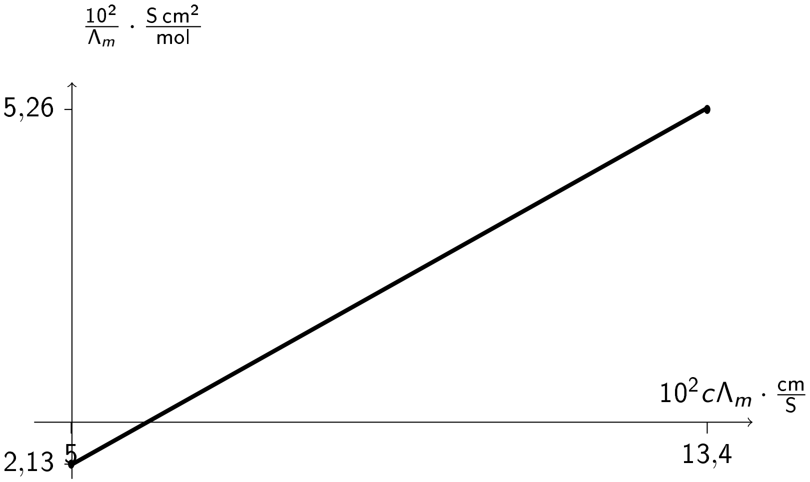
Ako imamo molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti $\Lambda^\circ_m = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

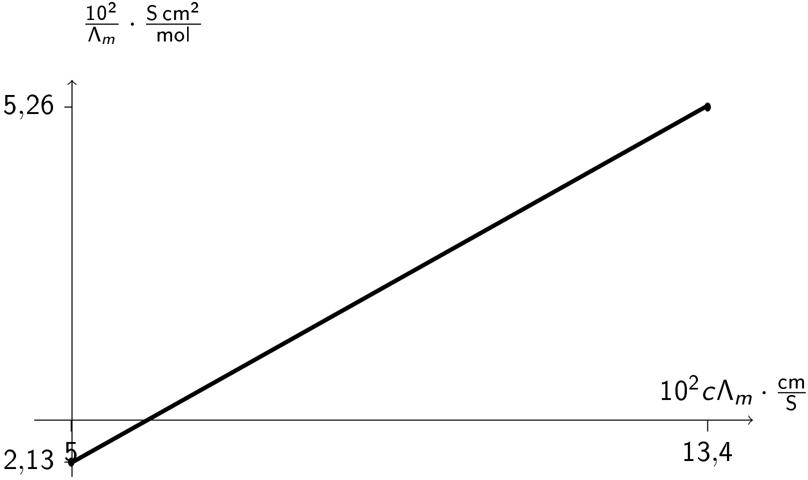
$$a = 0{,}37435, \quad b = 2{,}5595 \cdot 10^{-3},$$

$$y_1 = \frac{1}{47} \approx 0{,}02128, \quad y_2 = \frac{1}{19} \approx 0{,}05263.$$

Kako je $y = ax + b$, znači da je $x = (y - b)/a$:

$x_1 = (y_1 - b)/a \approx 0{,}05000$ i $x_2 = (y_2 - b)/a \approx 0{,}13375$.


$\frac{10^2}{\Lambda_m} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}$
5,26
2,13
5
13,4
$10^2 c\Lambda_m \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}}$



Izvedite eksplicitnu formulu ovisnosti Λ_m o c!

Riješimo jedan od lanjskih kvalifikacijskih zadataka . . .

Ovisnost pozitivne veličine ♉ o pozitivnoj veličini ♀ opisana je jednadžbom

$$\text{♉} = \tau \exp\left(\chi \cdot \frac{\text{♀} - \omega}{\rho\,\omega\,\text{♀}}\right).$$

Veličine χ, ρ, τ i ω su konstantne i pri eksperimentu na koji se odnosi ovaj zadatak imale su iznose $\chi = 65{,}8 \cdot 10^3 \ \bowtie \ \bigcirc^{-1}$, $\rho = 8{,}31 \ \bowtie \ \square^{-1} \bigcirc^{-1}$, $\tau = 4{,}02 \cdot 10^{-4} \bigcirc \ \bowtie^{-1}$ i $\omega = 350{,}0\,\square$.

- Odredite mjerne jedinice od ♀ i ♉.

Riješimo jedan od lanjskih kvalifikacijskih zadataka . . .

Ovisnost pozitivne veličine ♉ o pozitivnoj veličini ♀ opisana je jednadžbom

$$♉ = \tau \exp\left(\chi \cdot \frac{♀ - \omega}{\rho \, \omega \, ♀}\right).$$

Veličine χ, ρ, τ i ω su konstantne i pri eksperimentu na koji se odnosi ovaj zadatak imale su iznose $\chi = 65{,}8 \cdot 10^3 \ \bowtie \ \bigcirc^{-1}$, $\rho = 8{,}31 \ \bowtie \ \square^{-1} \bigcirc^{-1}$, $\tau = 4{,}02 \cdot 10^{-4} \bigcirc \ \bowtie^{-1}$ i $\omega = 350{,}0 \, \square$.

- Odredite mjerne jedinice od ♀ i ♉.
- Linearizirajte zadanu ovisnost.
- Koliko za $x = 2{,}25 \cdot 10^{-3}$ iznose ♀ i ♉?
- Unutar zadanog pravokutnog okvira (dolje) grafički prikažite lineariziranu ovisnost ♉ o ♀ ako znate da su se iznosi ♀ kretali u rasponu od 400,0 do 500,0 jedinica određenih u (a)-dijelu zadatka.

Ovogodišnji kvalifikacijski zadatak piše se

u utorak 12. studenog 2024. u 8:15 sati u predavaonici A2.

Sa sobom za vrijeme pisanja ne smijete imati ništa osim pribora za pisanje i crtanje, kalkulatora i identifikacijskog dokumenta.