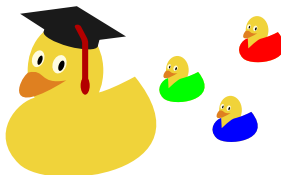


9. predavanje: Linearizacija neafinih ovisnosti. Funkcije zadane po dijelovima.

Franka Miriam Brückler



Linearizacija neafinih funkcija 🎓

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y *jednoznačno* povezane s X i Y .

Linearizacija neafinih funkcija 🎓

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y *jednoznačno* povezane s X i Y .
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y , $\psi : [a, b] \rightarrow K$ mora biti

Linearizacija neafinih funkcija 🎓

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y *jednoznačno* povezane s X i Y .
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y , $\psi : [a, b] \rightarrow K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena

Linearizacija neafinih funkcija 🎓

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y *jednoznačno* povezane s X i Y .
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y , $\psi : [a, b] \rightarrow K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f .

Primjer

$$k = A \exp \left(-\frac{E_a}{R T} \right); \quad R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Neka je $A > 0$ u s^{-1} i $T_1 \leq T \leq T_2$:

Linearizacija neafinih funkcija 🎓

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y *jednoznačno* povezane s X i Y .
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y , $\psi : [a, b] \rightarrow K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f .

Primjer

$$k = A \exp \left(-\frac{E_a}{R T} \right); \quad R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Neka je $A > 0$ u s^{-1} i $T_1 \leq T \leq T_2$:

$$y = \ln(k \cdot s), \quad x = \frac{K}{T}, \quad a = -\frac{E_a}{R \cdot K}, \quad b = \ln(A \cdot s)$$

Linearizacija neafinih funkcija 🎓

- Zadano: $Y = F(X)$ (za $a \leq X \leq b$), gdje f nije afina funkcija.
- Cilj: $y = ax + b$, gdje su x i y *jednoznačno* povezane s X i Y .
- Najčešće: $y = \phi(Y)$, $x = \psi(X)$. Da bi se mogle rekonstruirati vrijednosti X i Y iz vrijednosti x i y , $\psi : [a, b] \rightarrow K$ mora biti bijekcija, a tako i funkcija ψ kojoj je domena slika funkcije f .

Primjer

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{R T}\right); \quad R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Neka je $A > 0$ u s^{-1} i $T_1 \leq T \leq T_2$:

$$y = \ln(k \cdot s), \quad x = \frac{K}{T}, \quad a = -\frac{E_a}{R \cdot K}, \quad b = \ln(A \cdot s)$$

$$\frac{K}{T_2} = x_1 \leq x \leq x_2 = \frac{K}{T_1}; \quad y_1 = ax_2 + b \geq y \geq y_2 = ax_1 + b$$

Nađite greške u ovom pokušaju linearizacije ovisnosti θ o $[L]$:

$$\begin{aligned}
 [L] &= 10,2 \mu\text{mol l}^{-1} - 87,5 \mu\text{mol l}^{-1} \\
 \theta(K_d + [L]^n) &= [L]^n \\
 \theta &= \frac{[L]^n}{K_d + [L]^n} \\
 y &= \theta \\
 x &= \frac{1}{[L]^n} \\
 a &= \frac{[L]^n}{K_d} \\
 b &= 0 \\
 y &= ax + b \\
 y_1 &= 0,020187 \\
 y_2 &= 0,020195 \\
 x_1 &= 0,0293 \\
 x_2 &= 1,117 \cdot 10^{-3} \\
 a_1 &= 0,689 \\
 a_2 &= 18,08
 \end{aligned}$$

Ne mora uvijek y ovisiti samo o Y ni x samo o X

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2}.$$

Pritom Λ_m ima mjernu jedinicu $S \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1}$, a Λ_m° i K su pozitivne konstante. Linearizirajte ovisnost Λ_m o c !

Ne mora uvijek y ovisiti samo o Y ni x samo o X

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2}.$$

Pritom Λ_m ima mjernu jedinicu $\text{S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$, a Λ_m° i K su pozitivne konstante. Linearizirajte ovisnost Λ_m o c !

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} = \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} + \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2} : y = \frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ}; x = c, b = 0, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} ?!$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2} :$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}, x = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\text{S}^2 \text{ cm}}{\text{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}.$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2} :$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}, x = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\text{S}^2 \text{ cm}}{\text{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}.$$

Ako je za Λ_m raspon od $19 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ do $47 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i ako je poznato $\Lambda_m^\circ = 390,7 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i $K = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$:

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2} :$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}, x = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\text{S}^2 \text{ cm}}{\text{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}.$$

Ako je za Λ_m raspon od $19 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ do $47 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i ako je poznato $\Lambda_m^\circ = 390,7 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i $K = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$:

$$a = 0,37435, \quad b = 2,5595 \cdot 10^{-3},$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2} :$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}, x = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\text{S}^2 \text{ cm}}{\text{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}.$$

Ako je za Λ_m raspon od $19 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ do $47 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i ako je poznato $\Lambda_m^\circ = 390,7 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i $K = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$:

$$a = 0,37435, \quad b = 2,5595 \cdot 10^{-3},$$

$$y_1 = \frac{1}{47} \approx 0,02128, \quad y_2 = \frac{1}{19} \approx 0,05263.$$

Bolje:

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2} :$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}, x = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}}, a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\text{S}^2 \text{ cm}}{\text{mol}}, b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}.$$

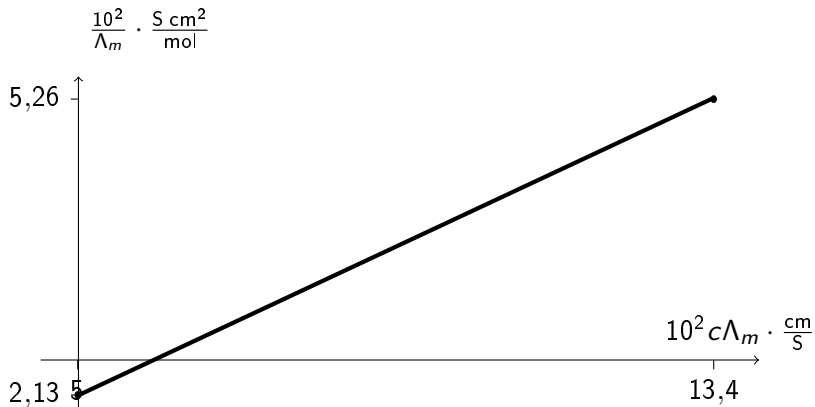
Ako je za Λ_m raspon od $19 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ do $47 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i ako je poznato $\Lambda_m^\circ = 390,7 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i $K = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ mol cm}^{-3}$:

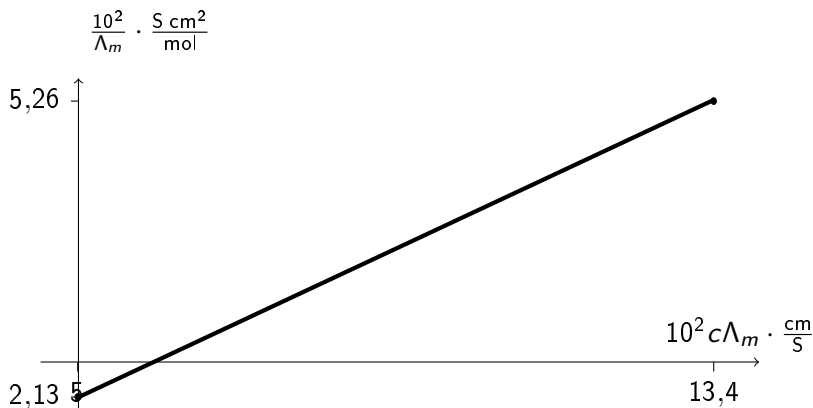
$$a = 0,37435, \quad b = 2,5595 \cdot 10^{-3},$$

$$y_1 = \frac{1}{47} \approx 0,02128, \quad y_2 = \frac{1}{19} \approx 0,05263.$$

Kako je $y = ax + b$, znači da je $x = (y - b)/a$:

$$x_1 = (y_1 - b)/a \approx 0,05000 \text{ i } x_2 = (y_2 - b)/a \approx 0,13375.$$





Zadatak

Izvedite eksplicitnu formulu ovisnosti Λ_m o c !

Riješimo jedan od lanjskih kvalifikacijskih zadataka ...

Ovisnost pozitivne veličine τ o pozitivnoj veličini ω opisana je jednadžbom

$$\tau^4 + \diamondsuit^4 = 2\diamondsuit^2\tau^2 + \spadesuit\clubsuit\diamondsuit^4\tau^4 \ln\left(\frac{\heartsuit}{\omega}\right).$$

Veličine $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$ i $\clubsuit$ su konstantne i za ovaj zadatak imaju iznose $\heartsuit = 0,125 \partial \exists^3$, $\diamondsuit = 2,35 \partial \forall$, $\spadesuit = 24,7 \forall^{-4}$ i $\clubsuit = 2,10 \cdot 10^{-2} \partial^{-4}$.

- Odredite mjerne jedinice od τ i ω .
- Linearizirajte zadanu ovisnost.
- Koliko za $x = 0,100$ iznose τ i ω ?
- Unutar zadanog pravokutnog okvira (dolje) grafički prikažite lineariziranu ovisnost τ o ω ako znate da su se iznosi τ kretali u rasponu od 0,119 do 0,124 jedinica određenih u prvom dijelu zadatka.

(a) Mjerna jedinica od ω je $\partial \Xi^3$,

(a) Mjerna jedinica od ω je $\partial \Xi^3$, a od τ je $\partial \forall$.

$$\tau^4 + \diamondsuit^4 = 2\diamondsuit^2\tau^2 + \spadesuit\clubsuit\diamondsuit^4\tau^4 \ln\left(\frac{\heartsuit}{\omega}\right)$$

(a) Mjerna jedinica od ω je $\partial \Xi^3$, a od τ je $\partial \forall$.

(b)

$$\tau^4 - 2\Diamond^2\tau^2 + \Diamond^4 = \spadesuit\clubsuit\Diamond^4\tau^4 \ln\left(\frac{\heartsuit}{\omega}\right) \Leftrightarrow (\tau^2 - \Diamond^2)^2 = \spadesuit\clubsuit\Diamond^4\tau^4 \ln\left(\frac{\heartsuit}{\omega}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\tau^2 - \diamond^2}{\tau^2 \diamond^2} \right)^2 = \spadesuit \clubsuit \ln \left(\frac{\heartsuit}{\omega} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{\diamond^2} - \frac{1}{\tau^2} = \pm \sqrt{\spadesuit \clubsuit \ln \left(\frac{\heartsuit}{\omega} \right)}$$

$$\frac{1}{\tau^2} = \sqrt{\spadesuit \clubsuit} \sqrt{\ln \left(\frac{\heartsuit}{\omega} \right)} + \frac{1}{\diamond^2}$$

$$y = \frac{\partial^2 \forall^2}{\tau^2}, \quad x = \sqrt{\ln \left(\frac{\heartsuit}{\omega} \right)}, \quad a = \frac{\sqrt{\spadesuit \clubsuit} \forall^2 \partial^2}{\diamond^2}, \quad b = \frac{\partial^2 \forall^2}{\diamond^2}$$

$$(a \approx 0,7202083, \quad b \approx 0,18107741)$$

Ovogodišnji **kvalifikacijski zadatak** piše se

u utorak 11. studenog 2025. u 10 sati u predavaonici A1.

Vrijeme pisanja je 30 minuta.

Sa sobom za vrijeme pisanja ne smijete imati ništa osim pribora za pisanje i crtanje, ne-grafičkog kalkulatora i identifikacijskog dokumenta.

U slučaju utvrđenog prepisivanja ili pak imanja na dohvat ruke bilo kojeg nedopušteno sredstva, student/ica neće smjeti pristupiti pisanju ni ispravljanju kvalifikacijskog zadatka tijekom semestra, nego ga mora riješiti u sklopu usmenog ispita.

-

Neelementarne funkcije

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!

Neelementarne funkcije

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija

Neelementarne funkcije

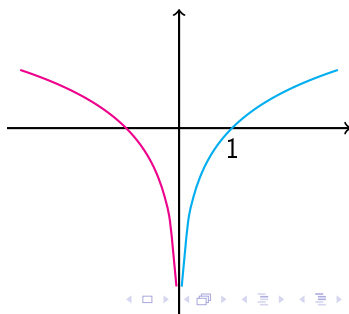
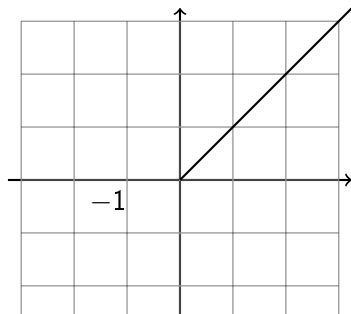
- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je

Neelementarne funkcije

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?

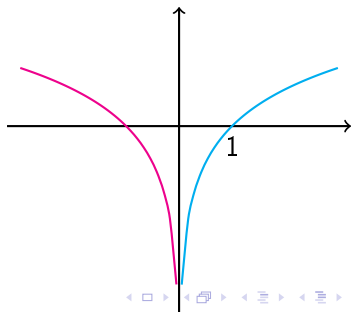
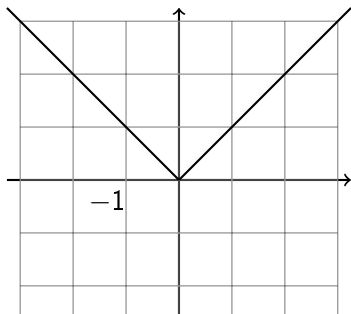
Neelementarne funkcije 🎓

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.



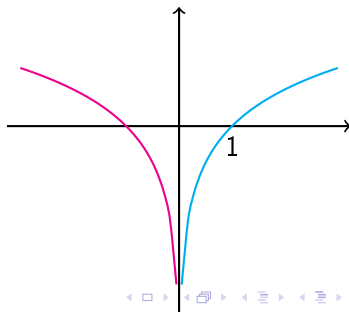
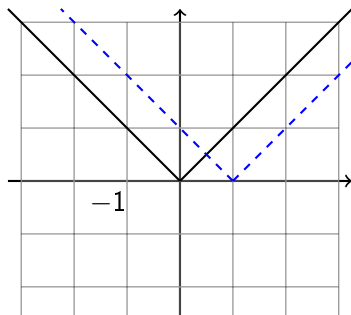
Neelementarne funkcije 🎓

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.



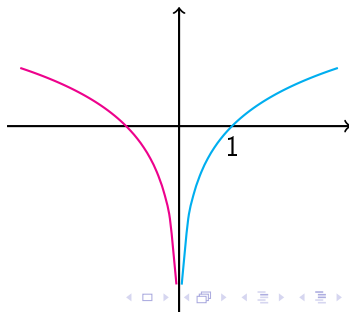
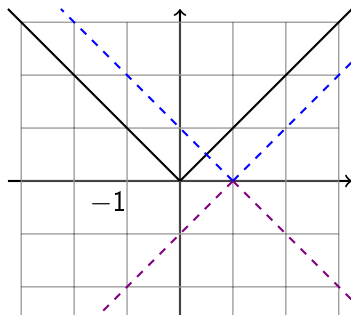
Neelementarne funkcije 🎓

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.



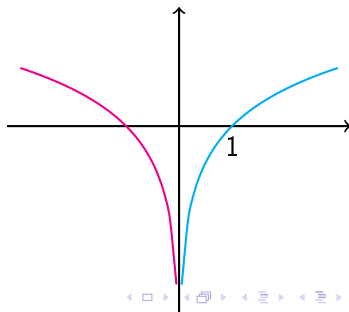
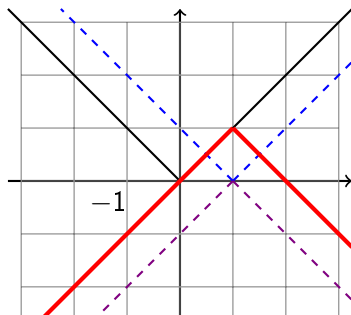
Neelementarne funkcije 🎓

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.



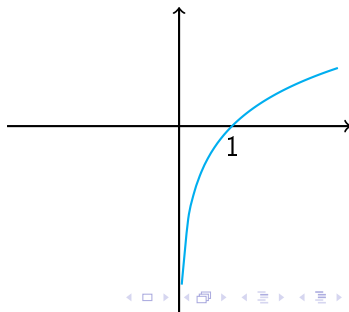
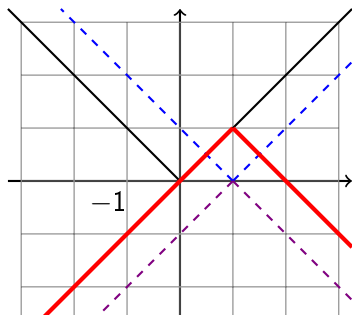
Neelementarne funkcije 🎓

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.



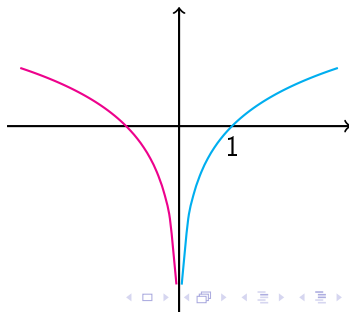
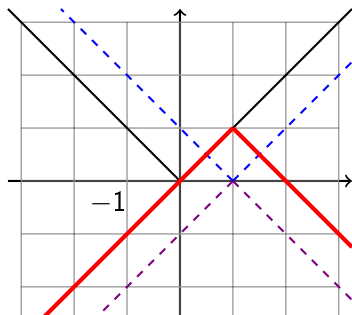
Neelementarne funkcije 🎓

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Ona se definira tako da je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.



Neelementarne funkcije 🎓

- Kako smo definirali elementarne funkcije? Osmislite neku neelementarnu realnu funkciju jedne varijable!
- Najpoznatija neelementarna funkcija je funkcija **apsolutne vrijednosti**, u oznaci $f(x) = |x|$. Onda se definira tako da je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za $x \geq 0$ i $f(x) = -x$ inače. Koja svojstva ima funkcija apsolutne vrijednosti?
- Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 1 - |1 - x|$ i $g(x) = \ln |x|$.



Funkcije zadane po dijelovima

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ neelementarna realna funkcija jedne varijable. Ako joj je domenu D moguće rastaviti na *disjunktne* podskupove $A, B, \dots$, tako da se elementi od A preslikavaju po pravilu elementarne funkcije f_A , elementi od B po pravilu druge elementarne funkcije f_B i t.d., kažemo da je f **zadana po dijelovima** i pišemo

$$f(x) = \begin{cases} f_A(x), & x \in A \\ f_B(x), & x \in B \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Funkcije zadane po dijelovima

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ neelementarna realna funkcija jedne varijable. Ako joj je domenu D moguće rastaviti na *disjunktne* podskupove $A, B, \dots$, tako da se elementi od A preslikavaju po pravilu elementarne funkcije f_A , elementi od B po pravilu druge elementarne funkcije f_B i t.d., kažemo da je f **zadana po dijelovima** i pišemo

$$f(x) = \begin{cases} f_A(x), & x \in A \\ f_B(x), & x \in B \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x \leq e \\ \frac{x}{e} & e < x < 2e \end{cases}$$

Zadatak

Nađite formulu funkcije čiji graf je prikazan na slici dolje.

