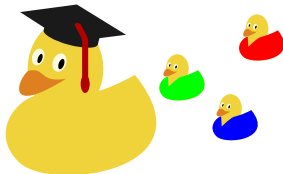


10. predavanje: Uvod u deriviranje.

Franka Miriam Brückler



Motivacijski primjer

Mala raketa lansirana je vertikalno uvis s početnom brzinom $35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Tijekom prvih 30 sekundi ovisnost akceleracije rakete o vremenu dobro je aproksimirana funkcijom

$$a(t) = -0,300 t^2 + 6,00 t.$$

Koja je maksimalna i prosječna brzina te rakete tijekom navedenih 30 sekundi? Koliki put raketa prođe u tih 30 sekundi?

Motivacijski primjer

Mala raketa lansirana je vertikalno uvis s početnom brzinom $35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Tijekom prvih 30 sekundi ovisnost akceleracije rakete o vremenu dobro je aproksimirana funkcijom

$$a(t) = -0,300 t^2 + 6,00 t.$$

Koja je maksimalna i prosječna brzina te rakete tijekom navedenih 30 sekundi? Koliki put raketa prođe u tih 30 sekundi?

$$a(t) = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t, \quad 0 \leq t \leq 30 \text{ s}$$

Skicirajte graf funkcije $a = a(t)$!

Uvod u deriviranje

Oznake derivacije funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ po nezavisnoj varijabli t :

$$f', \quad \dot{f}, \quad \frac{df}{dt}$$

Uvod u deriviranje

Oznake derivacije funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ po nezavisnoj varijabli t :

$$f', \quad \dot{f}, \quad \frac{df}{dt}$$

Derivacija se ne definira kao funkcija, nego točku po točku!

Neka je $c \in I$.

- $\dot{f}(c)$ je trenutna brzina promjene f u trenutku c
- $f'(c)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$
- $\frac{df}{dt}(c)$ je aproksimacija za $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ za $\Delta x \approx 0$

Uvod u deriviranje

Oznake derivacije funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ po nezavisnoj varijabli t :

$$f', \quad \dot{f}, \quad \frac{df}{dt}$$

Derivacija se ne definira kao funkcija, nego točku po točku!

Neka je $c \in I$.

- $\dot{f}(c)$ je trenutna brzina promjene f u trenutku c
- $f'(c)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$
- $\frac{df}{dt}(c)$ je aproksimacija za $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ za $\Delta x \approx 0$

Primjer

U motivacijskom primjeru: $a(t) = \dot{v}(t)$, gdje je $v(t) = \dot{s}(t)$.

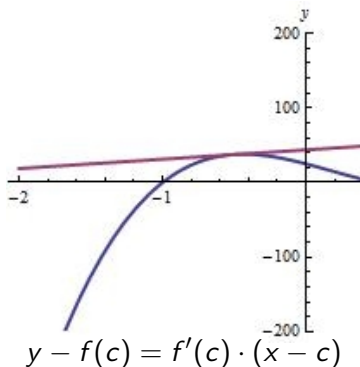
Problem tangente

Ako je zadana neka krivulja i odabrana točka na njoj, kako konstruirati tangentu na tu krivulju u toj točki? I što je to uopće tangenta na krivulju?

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$$

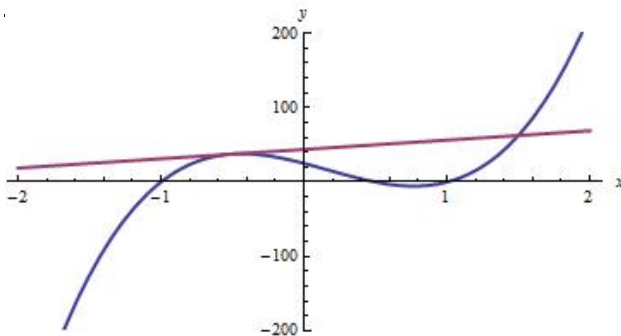
Problem tangente

Ako je zadana neka krivulja i odabrana točka na njoj, kako konstruirati tangentu na tu krivulju u toj točki? I što je to uopće tangenta na krivulju? Tangenta je pravac



Problem tangente

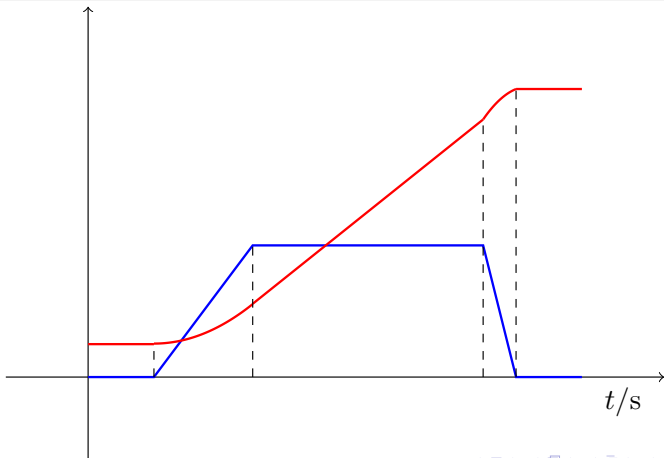
Ako je zadana neka krivulja i odabrana točka na njoj, kako konstruirati tangentu na tu krivulju u toj točki? I što je to uopće tangenta na krivulju? Tangenta je pravac koji se od svih pravaca koji prolaze kroz diralište najbolje priljubljuje uz krivulju u blizini dirališta.



$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$$

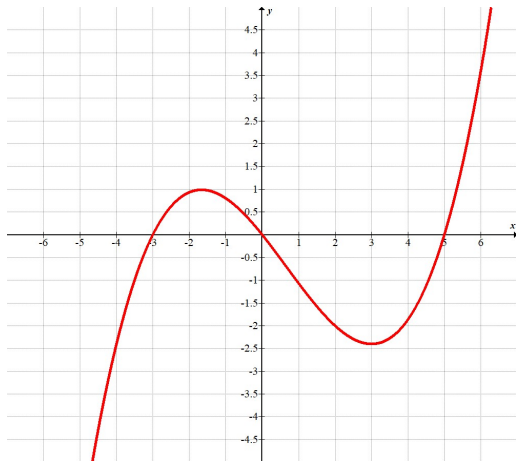
Zadatak

Ako znate da od dvije krivulje na slici jedna predstavlja ovisnost udaljenosti točke koja se giba po pravcu o vremenu od neke fiksirane pozicije, a druga brzinu, koja je koja? Argumentirajte!



Zadatak

Na slici je prikazan graf neke funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Temeljem te slike što točnije procijeniti $f'(0)$, $f'(3)$ i $f'(5)$.



- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija afine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija afine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija affine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
 U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija affine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer

$$(x^2)' = 2x,$$

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija afine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer

$$(x^2)' = 2x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{1}{t^2},$$

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija afine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer

$$(x^2)' = 2x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{1}{t^2}, \quad (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija afine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine ♡ po veličini ◇, ako je mjerna jedinica od ♡ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od ◇ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer

$$(x^2)' = 2x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{1}{t^2}, \quad (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija affine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer

$$(x^2)' = 2x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{1}{t^2}, \quad (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad \frac{d}{dt} (10^t) = 10^t \ln t,$$

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija affine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer

$$(x^2)' = 2x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{1}{t^2}, \quad (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad \frac{d}{dt} (10^t) = 10^t \ln t, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- Temeljem jedne od triju „definicija“ argumentirajte da je derivacija affine funkcije u svakoj točki jednaka njenom koeficijentu smjera.
- Temeljem jedne od triju „definicija“ odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *^2$.

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je **derivabilna** ako $f'(c)$ postoji za svaki $c \in I$.
U tom slučaju smo dobili novu funkciju $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer

$$(x^2)' = 2x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{1}{t^2}, \quad (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad \frac{d}{dt} (10^t) = 10^t \ln t, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Domena od f' uvijek je podskup domene od f !

Linearnost deriviranja i više derivacije

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t), \quad (C f(t))' = C f'(t)$$

Linearnost deriviranja i više derivacije

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t), \quad (C f(t))' = C f'(t)$$

- Dokažite da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija.

Linearnost deriviranja i više derivacije

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t), \quad (C f(t))' = C f'(t)$$

- Dokažite da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija.
- Izvedite formulu za derivaciju kosinusa hiperbolnog.

Linearnost deriviranja i više derivacije

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t), \quad (C f(t))' = C f'(t)$$

- Dokažite da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija.
- Izvedite formulu za derivaciju kosinusa hiperbolnog.
- Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \ln 3$ u točki $c = 1$.

Linearnost deriviranja i više derivacije

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t), \quad (C f(t))' = C f'(t)$$

- Dokažite da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija.
- Izvedite formulu za derivaciju kosinusa hiperbolnog.
- Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \ln 3$ u točki $c = 1$.

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

- U motivacijskom primjeru je $a(t) = \ddot{s}(t)$.

Linearnost deriviranja i više derivacije

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t), \quad (C f(t))' = C f'(t)$$

- Dokažite da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija.
- Izvedite formulu za derivaciju kosinusa hiperbolnog.
- Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \ln 3$ u točki $c = 1$.

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

- U motivacijskom primjeru je $a(t) = \ddot{s}(t)$.
- Što možete zaključiti o k -toj derivaciji polinoma stupnja n za $k = 1, 2, \dots, n + 1$?

Linearnost deriviranja i više derivacije

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t), \quad (C f(t))' = C f'(t)$$

- Dokažite da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija.
- Izvedite formulu za derivaciju kosinusa hiperbolnog.
- Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \ln 3$ u točki $c = 1$.

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

- U motivacijskom primjeru je $a(t) = \ddot{s}(t)$.
- Što možete zaključiti o k -toj derivaciji polinoma stupnja n za $k = 1, 2, \dots, n + 1$? Primijenite to na motivacijski primjer!
- Izračunajte $\frac{d^2}{dt^2}(\exp(t) - \log t)$.

Uvod u (obične) diferencijalne jednačbe

Zadatak

Simboliški zapišite rečenicu: Traže se sve realne funkcije jedne varijable čija druga derivacija je proporcionalna samoj funkciji.

Uvod u (obične) diferencijalne jednačbe

Zadatak

Simboliški zapišite rečenicu: Traže se sve realne funkcije jedne varijable čija druga derivacija je proporcionalna samoj funkciji.

- Obična diferencijalna jednačba je

Uvod u (obične) diferencijalne jednačbe

Zadatak

Simboliški zapišite rečenicu: Traže se sve realne funkcije jedne varijable čija druga derivacija je proporcionalna samoj funkciji.

- **Obična diferencijalna jednačba** je jednačba u kojoj je nepoznanica realna funkcija jedne varijable y , a jednačba pritom iskazuje vezu između y , njene nezavisne varijable t i derivacija od y .

Uvod u (obične) diferencijalne jednačbe

Zadatak

Simboliški zapišite rečenicu: Traže se sve realne funkcije jedne varijable čija druga derivacija je proporcionalna samoj funkciji.

- **Obična diferencijalna jednačba** je jednačba u kojoj je nepoznanica realna funkcija jedne varijable y , a jednačba pritom iskazuje vezu između y , njene nezavisne varijable t i derivacija od y .
- **Red diferencijalne jednačbe** je

Uvod u (obične) diferencijalne jednačbe

Zadatak

Simboliški zapišite rečenicu: Traže se sve realne funkcije jedne varijable čija druga derivacija je proporcionalna samoj funkciji.

- **Obična diferencijalna jednačba** je jednačba u kojoj je nepoznanica realna funkcija jedne varijable y , a jednačba pritom iskazuje vezu između y , njene nezavisne varijable t i derivacija od y .
- **Red diferencijalne jednačbe** je red najviše derivacije od y koja se pojavljuje u jednačbi.

Uvod u (obične) diferencijalne jednačbe

Zadatak

Simboliški zapišite rečenicu: Traže se sve realne funkcije jedne varijable čija druga derivacija je proporcionalna samoj funkciji.

- **Obična diferencijalna jednačba** je jednačba u kojoj je nepoznanica realna funkcija jedne varijable y , a jednačba pritom iskazuje vezu između y , njene nezavisne varijable t i derivacija od y .
- **Red diferencijalne jednačbe** je red najviše derivacije od y koja se pojavljuje u jednačbi.
- **Rješenje diferencijalne jednačbe** je

Uvod u (obične) diferencijalne jednačbe

Zadatak

Simboliški zapišite rečenicu: Traže se sve realne funkcije jedne varijable čija druga derivacija je proporcionalna samoj funkciji.

- **Obična diferencijalna jednačba** je jednačba u kojoj je nepoznanica realna funkcija jedne varijable y , a jednačba pritom iskazuje vezu između y , njene nezavisne varijable t i derivacija od y .
- **Red diferencijalne jednačbe** je red najviše derivacije od y koja se pojavljuje u jednačbi.
- **Rješenje diferencijalne jednačbe** je svaka funkcija koja uvrštena u jednačbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable.

Primjer

Za slobodni pad drugi Newtonov zakon postaje diferencijalna jednadžba

$$m \ddot{s} = -m g,$$

$$\ddot{s} = -g.$$

Znamo da je druga derivacija kvadratnog polinoma konstantna, dakle nagađemo

$$s(t) = a t^2 + b t + c$$

$$\dot{s}(t) = 2at + b$$

$$\ddot{s}(t) = 2a$$

Dakle, $a = -\frac{g}{2}$ pa je $s(t) = -\frac{g}{2} t^2 + b t + c$. U ovom trenu još ne znamo odrediti b i c , ali im možemo odrediti fizikalnu dimenziju.