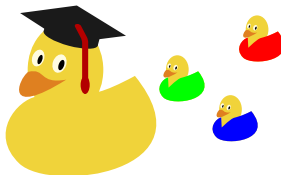


11. predavanje: Uvod u diferencijalne jednačbe

Franka Miriam Brückler



Osnovno o diferencijalnim jednažbama

- Diferencijalna jednažba je

Osnovno o diferencijalnim jednađbama

- Diferencijalna jednađba je jednađba kojom se nepoznata funkcija opisuje njezinom vezom s njezinom nezavisnom varijablom i njezinim derivacijama.
- Koji je red tzv. logističke diferencijalne jednađbe

$$\dot{N} = r N \left(1 - \frac{N}{K} \right)?$$

Osnovno o diferencijalnim jednačbama

- Diferencijalna jednačba je jednačba kojom se nepoznata funkcija opisuje njezinom vezom s njezinom nezavisnom varijablom i njezinim derivacijama.
- Koji je red tzv. logističke diferencijalne jednačbe

$$\dot{N} = r N \left(1 - \frac{N}{K} \right)?$$

(Podrazumijeva se $0 < N < K$).

- Koji je red diferencijalne jednačbe $y' y'' = \ln y'''$?

Osnovno o diferencijalnim jednađbama

- Diferencijalna jednađba je jednađba kojom se nepoznata funkcija opisuje njezinom vezom s njezinom nezavisnom varijablom i njezinim derivacijama.
- Koji je red tzv. logističke diferencijalne jednađbe

$$\dot{N} = r N \left(1 - \frac{N}{K} \right)?$$

(Podrazumijeva se $0 < N < K$).

- Koji je red diferencijalne jednađbe $y' y'' = \ln y'''$?
- Ako je diferencijalna jednađba reda 2, njezino rješenje bit će određeno do na koliko neodređenih konstanti?

Osnovno o diferencijalnim jednađbama

- Diferencijalna jednađba je jednađba kojom se nepoznata funkcija opisuje njezinom vezom s njezinom nezavisnom varijablom i njezinim derivacijama.
- Koji je red tzv. logističke diferencijalne jednađbe

$$\dot{N} = r N \left(1 - \frac{N}{K} \right)?$$

(Podrazumijeva se $0 < N < K$).

- Koji je red diferencijalne jednađbe $y' y'' = \ln y'''$?
- Ako je diferencijalna jednađba reda 2, njezino rješenje bit će određeno do na koliko neodređenih konstanti?
- Je li ikoja od funkcija $f(x) = \exp(2x) - x \exp(2x)$ i $g(x) = x^2 \exp(x)$ rješenje diferencijalne jednađbe $y'' + 4y = 4y'$?

Početni uvjeti za diferencijalne jednadžbe

Zadatak

Postavite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje harmonijski oscilator s trenjem, znajući da je sila trenja razmjerna brzini oscilacija.

Početni uvjeti za diferencijalne jednadžbe

Zadatak

Postavite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje harmonijski oscilator s trenjem, znajući da je sila trenja razmjerna brzini oscilacija. Koliko nam treba početnih uvjeta da bi rješenje bilo jednoznačno određeno?

Početni uvjeti za diferencijalne jednadžbe

Zadatak

Postavite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje harmonijski oscilator s trenjem, znajući da je sila trenja razmjerna brzini oscilacija. Koliko nam treba početnih uvjeta da bi rješenje bilo jednoznačno određeno? Ako je koeficijent trenja dovoljno malen u odnosu na masu i koeficijent opruge, rješenje te jednadžbe ima oblik

$$z(t) = \exp(\alpha t) \cdot (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),$$

gdje je $\alpha = -\frac{f}{2m}$, a $\beta = \frac{\sqrt{4mk-f^2}}{2m}$. Ako je oscilator na početku bio u ravnotežnom položaju, ali mu je dana početna brzina v_0 , odredite $z(t)$.

Ako je diferencijalna jednačba 1. reda, iznos neodređenog koeficijenta u rješenju $y = f(x)$ dobijemo iz poznavanja $f(0)$, a ako je diferencijalna jednačba 2. reda, iznose neodređenih koeficijenata u rješenju $y = f(x)$ dobijemo iz poznavanja $f(0)$ i $f'(0)$. Umjesto 0 može poslužiti bilo koji drugi konkretan x .

Ako je diferencijalna jednačba 1. reda, iznos neodređenog koeficijenta u rješenju $y = f(x)$ dobijemo iz poznavanja $f(0)$, a ako je diferencijalna jednačba 2. reda, iznose neodređenih koeficijenata u rješenju $y = f(x)$ dobijemo iz poznavanja $f(0)$ i $f'(0)$. Umjesto 0 može poslužiti bilo koji drugi konkretan x .

Zadatak

Pri nekom malom jezeru uvjeti su prikladni za preživljavanje najviše $K = 100$ pataka i vremenska ovisnost broja pataka se modelira logističkom jednačbom. Na to jezero naselimo par pataka (patka i patku). Nakon 3 godine uz nepromijenjene uvjete nađeno je 12 pataka pri tom jezeru. Ako znate da su sva rješenja logističke jednačbe oblika

$$N(t) = \frac{C K \exp(r t)}{1 + C \exp(r t)},$$

odredite C i r .

Ako je diferencijalna jednačba 1. reda, iznos neodređenog koeficijenta u rješenju $y = f(x)$ dobijemo iz poznavanja $f(0)$, a ako je diferencijalna jednačba 2. reda, iznose neodređenih koeficijenata u rješenju $y = f(x)$ dobijemo iz poznavanja $f(0)$ i $f'(0)$. Umjesto 0 može poslužiti bilo koji drugi konkretan x .

Zadatak

Pri nekom malom jezeru uvjeti su prikladni za preživljavanje najviše $K = 100$ pataka i vremenska ovisnost broja pataka se modelira logističkom jednačbom. Na to jezero naselimo par pataka (patka i patku). Nakon 3 godine uz nepromijenjene uvjete nađeno je 12 pataka pri tom jezeru. Ako znate da su sva rješenja logističke jednačbe oblika

$$N(t) = \frac{C K \exp(r t)}{1 + C \exp(r t)},$$

odredite C i r . Koje su nultočke od $\ddot{N}$?

Zadatak

Zadana je diferencijalna jednačina $y y' = 3 - x$. Neka je $y = f(x)$, $f : \langle 1, 5 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ono njezino rješenje za koje je $y = 2$ tangenta na graf od f . U kojoj točki grafa od f je to tangenta?

Zadatak

Zadana je diferencijalna jednačina $y y' = 3 - x$. Neka je $y = f(x)$, $f : \langle 1, 5 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ono njezino rješenje za koje je $y = 2$ tangenta na graf od f . U kojoj točki grafa od f je to tangenta?

Zadatak

Zakon brzine reakcije prvog reda na čiju brzinu utječe koncentracija c samo jednog reaktanta R ima oblik

$$\frac{dc}{dt} = -K c.$$

Provjerite da je ovisnost c o vremenu za takve reakcije dana s $c = c_0 \exp(-K t)$, gdje je c_0 početna koncentracija reaktanta R .

Zadatak

Zadana je diferencijalna jednačina $y y' = 3 - x$. Neka je $y = f(x)$, $f : \langle 1, 5 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ono njezino rješenje za koje je $y = 2$ tangenta na graf od f . U kojoj točki grafa od f je to tangenta?

Zadatak

Zakon brzine reakcije prvog reda na čiju brzinu utječe koncentracija c samo jednog reaktanta R ima oblik

$$\frac{dc}{dt} = -K c.$$

Provjerite da je ovisnost c o vremenu za takve reakcije dana s $c = c_0 \exp(-K t)$, gdje je c_0 početna koncentracija reaktanta R . Ako su za neku reakciju izmjerene koncentracije c u intervalima od po 1 minute iznosile redom $c_0 = 0,100 \text{ mol/L}$, $0,0605 \text{ mol/L}$, $0,0370 \text{ mol/L}$, $0,0225 \text{ mol/L}$, $0,0125 \text{ mol/L}$, $0,00820 \text{ mol/L}$, je li razumno pretpostaviti da se radi o reakciji prvog reda?

Zadatak

Zadana je diferencijalna jednačba $y y' = 3 - x$. Neka je $y = f(x)$, $f : \langle 1, 5 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ono njezino rješenje za koje je $y = 2$ tangenta na graf od f . U kojoj točki grafa od f je to tangenta?

Zadatak

Zakon brzine reakcije prvog reda na čiju brzinu utječe koncentracija c samo jednog reaktanta R ima oblik

$$\frac{dc}{dt} = -K c.$$

Provjerite da je ovisnost c o vremenu za takve reakcije dana s $c = c_0 \exp(-K t)$, gdje je c_0 početna koncentracija reaktanta R . Ako su za neku reakciju izmjerene koncentracije c u intervalima od po 1 minute iznosile redom $c_0 = 0,100$ mol/L, $0,0605$ mol/L, $0,0370$ mol/L, $0,0225$ mol/L, $0,0125$ mol/L, $0,00820$ mol/L, je li razumno pretpostaviti da se radi o reakciji prvog reda? Pokažite da u ovakvim reakcijama vrijeme potrebno da se koncentracija reaktanta R prepolovi ne ovisi o c_0 .