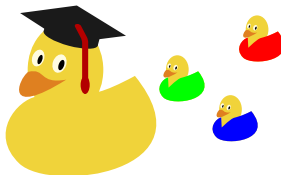


11. predavanje: Uvod u neodređene integrale.

Franka Miriam Brückler



Antiderivacija

Motivacijski primjer

$$a(t) = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t, \quad 0 \leq t \leq 30 \text{ s}$$

$$a(t) = \dot{v}(t)$$

$$v(t) = ?$$

Antiderivacija

Motivacijski primjer

$$a(t) = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t, \quad 0 \leq t \leq 30 \text{ s}$$

$$a(t) = \dot{v}(t)$$

$$v(t) = ?$$

Antiderivacija (primitivna funkcija) funkcije $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ je

Antiderivacija

Motivacijski primjer

$$a(t) = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t, \quad 0 \leq t \leq 30 \text{ s}$$

$$a(t) = \dot{v}(t)$$

$$v(t) = ?$$

Antiderivacija (primitivna funkcija) funkcije $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f'(t) = F(t)$ za sve $t \in I$.

Antiderivacija

Motivacijski primjer

$$a(t) = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t, \quad 0 \leq t \leq 30 \text{ s}$$

$$a(t) = \dot{v}(t)$$

$$v(t) = ?$$

Antiderivacija (primitivna funkcija) funkcije $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f'(t) = F(t)$ za sve $t \in I$.

Primjer

Antiderivacija od $F(x) = \exp(x)$ je $f(x) = \exp(x)$, ali i $g(x) = \exp(x) - \pi$. Što je s antiderivacijom od $G(x) = \frac{1}{x}$?

Neodređeni integral

Teorem

Ako funkcija F ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo. Ako je f jedna antiderivacija od F , onda su sve antiderivacije od F dane formulom $f_C(t) = f(t) + C$, gdje je C proizvoljna konstanta.

Neodređeni integral

Teorem

Ako funkcija F ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo. Ako je f jedna antiderivacija od F , onda su sve antiderivacije od F dane formulom $f_C(t) = f(t) + C$, gdje je C proizvoljna konstanta.

Neodređeni integral funkcije F (**podintegralne funkcije**) je skup svih njenih antiderivacija:

$$\int F(t) dt = f(t) + C.$$

Npr. $\int \exp(t) dt = \exp(t) + C.$

Neodređeni integral

Teorem

Ako funkcija F ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo. Ako je f jedna antiderivacija od F , onda su sve antiderivacije od F dane formulom $f_C(t) = f(t) + C$, gdje je C proizvoljna konstanta.

Neodređeni integral funkcije F (**podintegralne funkcije**) je skup svih njenih antiderivacija:

$$\int F(t) dt = f(t) + C.$$

Npr. $\int \exp(t) dt = \exp(t) + C.$

$$\frac{d}{dt} \left(\int F(t) dt \right) = F(t), \quad \int \frac{df}{dt} dt = f(t) + C$$

Linearnost neodređenog integrala

$$\int (F(t) + G(t)) \, dt = \int F(t) \, dt + \int G(t) \, dt,$$
$$\int K F(t) \, dt = K \int F(t) \, dt$$

Linearnost neodređenog integrala

$$\int (F(t) + G(t)) dt = \int F(t) dt + \int G(t) dt,$$

$$\int K F(t) dt = K \int F(t) dt$$

Tablično integriranje je integriranje temeljem osnovne tablice i linearnosti integrala.

Zadatak

$$\int (2 \cos x + \sqrt{x} - 1) dx = ?$$

Linearnost neodređenog integrala

$$\int (F(t) + G(t)) dt = \int F(t) dt + \int G(t) dt,$$

$$\int K F(t) dt = K \int F(t) dt$$

Tablično integriranje je integriranje temeljem osnovne tablice i linearnosti integrala.

Zadatak

$$\int (2 \cos x + \sqrt{x} - 1) dx = ?$$

Zadatak

$$\int \frac{4w^{10} - 2w^2 + 15w}{w^3} dw = ?$$

Linearnost neodređenog integrala

$$\int (F(t) + G(t)) dt = \int F(t) dt + \int G(t) dt,$$

$$\int K F(t) dt = K \int F(t) dt$$

Tablično integriranje je integriranje temeljem osnovne tablice i linearnosti integrala.

Zadatak

$$\int (2 \cos x + \sqrt{x} - 1) dx = ?$$

Zadatak

$$\int \frac{4w^{10} - 2w^2 + 15w}{w^3} dw = ?$$

Opće i partikularno rješenje diferencijalne jednačbe

Primjer

Rješenja diferencijalne jednačbe oblika $\dot{y} = F(t)$ su antiderivacije od F . Riješite diferencijalnu jednačbu $\ddot{s} = -g$!

Opće i partikularno rješenje diferencijalne jednačbe

Primjer

Rješenja diferencijalne jednačbe oblika $\dot{y} = F(t)$ su antiderivacije od F . Riješite diferencijalnu jednačbu $\ddot{s} = -g$!

Fizikalna dimenzija integrala $\int F(t) dt$ je „umnoža“ fizikalnih dimenzija zavisne i nezavisne varijable ($F(t)$ i t).

Opće i partikularno rješenje diferencijalne jednačbe

Primjer

Rješenja diferencijalne jednačbe oblika $\dot{y} = F(t)$ su antiderivacije od F . Riješite diferencijalnu jednačbu $\ddot{s} = -g$!

Fizikalna dimenzija integrala $\int F(t) dt$ je „umnoža“ fizikalnih dimenzija zavisne i nezavisne varijable ($F(t)$ i t).

Opće rješenje diferencijalne jednačbe je ono njeno rješenje koje sadrži onoliko neodređenih konstanti koliki je njezin red.

Partikularno rješenje diferencijalne jednačbe se iz općeg dobiva za neke konkretne vrijednosti neodređenih konstanti i obično se određuje iz **početnih uvjeta**: $y(t_0) = y_0$ (i $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$).

Motivacijski primjer

$$v(t) = \int a(t) dt = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot \frac{t^3}{3} + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot \frac{t^2}{2} + C_v.$$

Što je C_v ?

Motivacijski primjer

$$v(t) = \int a(t) dt = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot \frac{t^3}{3} + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot \frac{t^2}{2} + C_v.$$

Što je C_v ?

Primjer

U ekonomiji i biologiji se koristi eksponencijalni model rasta/pada populacije. Radi se o diferencijalnoj jednačbi prvog reda oblika $\dot{N} = k N$ s početnim uvjetom $N(0) = N_0$. Opće rješenje te diferencijalne jednačbe je $N(t) = C \exp(kt)$. Koji je smisao konstante integracije? Kako bismo mogli odrediti k u konkretnoj situaciji?

Integralne krivulje

Primjer

Integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $y''' = 0$ su sve parabole u ravnini kojima je os simetrije vertikalna (tj. opće rješenje te jednadžbe je $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$). Da je bio zadan početni uvjet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$ dobili bismo partikularno rješenje, parabolu $y = x^2 + 1$.

Integralne krivulje

Primjer

Integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $y''' = 0$ su sve parabole u ravnini kojima je os simetrije vertikalna (tj. opće rješenje te jednadžbe je $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$). Da je bio zadan početni uvjet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$ dobili bismo partikularno rješenje, parabolu $y = x^2 + 1$.

Zadatak

Skicirajte integralnu krivulju jednadžbe $y' = y - x$ koja prolazi kroz ishodište.

