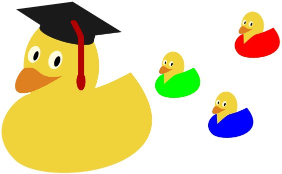
12. predavanje: Konveksnost i konkavnost. Lokalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable.

Franka Miriam Brückler



Konveksnost i konkavnost

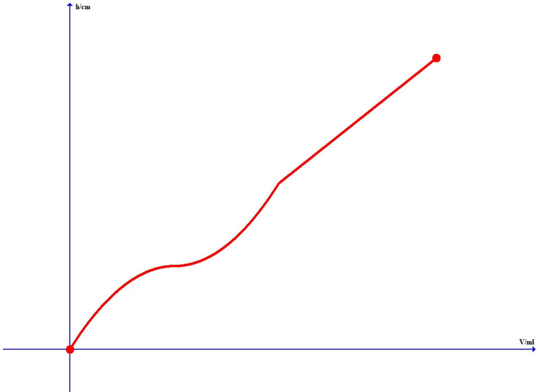
Primjer

Okruglu tikvicu punite nekom tekućinom. U pravokutnom koordinatnom sustavu skicirajte graf ovisnosti razine vode (visine u odnosu na dno posude) o dodanom volumenu tekućine.

Konveksnost i konkavnost

Primjer

Okruglu tikvicu punite nekom tekućinom. U pravokutnom koordinatnom sustavu skicirajte graf ovisnosti razine vode (visine u odnosu na dno posude) o dodanom volumenu tekućine.



Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)?

Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)? A ako usporava?

Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)? A ako usporava? A ako se giba s konstantnom brzinom?

Zadatak

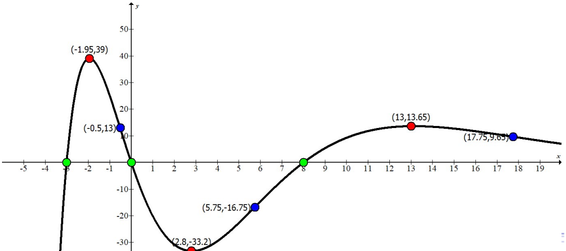
Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)? A ako usporava? A ako se giba s konstantnom brzinom? Kakva je veza između triju funkcija $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$?

Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)? A ako usporava? A ako se giba s konstantnom brzinom? Kakva je veza između triju funkcija $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$?

Zadatak

Neka je s $g(x)$ definiran iznos koeficijenta smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x, f(x))$. Graf od f je prikazan na slici dolje. Kako izgleda graf funkcije g?



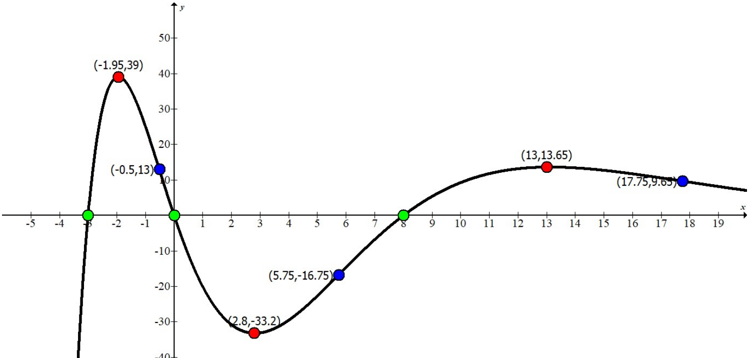
Predznak iznosa $f(x)$ govori nam

Predznak iznosa $f(x)$ govori nam je li točka $(x, f(x))$ ispod ili iznad osi apscisa; predznak od $f'(x)$ govori nam

Predznak iznosa $f(x)$ govori nam je li točka $(x, f(x))$ ispod ili iznad osi apscisa; predznak od $f'(x)$ govori nam raste li ili pada funkcija f na nekom intervalu oko x; predznak od $f''(x)$ nam pak opisuje na koji način je graf od f zakrivljen za nezavisne varijable blizu x.

Zadatak

Za funkciju f čiji graf je na slici odredite intervale pozitivnosti i negativnosti od f, f' i f''.



- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I?

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!
- Kako izgleda graf funkcije f s domenom $\langle 0, 1 \rangle$ ako je za sve x iz domene $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$?

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!
- Kako izgleda graf funkcije f s domenom $\langle 0, 1\rangle$ ako je za sve x iz domene $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$?
- Nadopunite tablicu skicama koje sugeriraju pravila:

na I	$+$	$-$
f		
f'		
f''		

Konveksnost, konkavnost i točke infleksije

Definicija

Funkcija f je na intervalu I konveksna odnosno konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

odnosno

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Konveksnost, konkavnost i točke infleksije

Definicija

Funkcija f je na intervalu I konveksna odnosno konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

odnosno

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ako je $c \in I$ takav da je na nekom intervalu lijevo od c funkcija f konveksna, a na nekom intervalu desno konkavna (ili obrnuto), onda c nazivamo točkom infleksije funkcije f.

Zadatak

Koji su intervali konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije f čiji graf smo dosad dvaput imali u ovoj prezentaciji?

Zadatak

Koji su intervali konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije f čiji graf smo dosad dvaput imali u ovoj prezentaciji?

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje su na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne.

Zadatak

Koji su intervali konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije f čiji graf smo dosad dvaput imali u ovoj prezentaciji?

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje su na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne.

Teorem

Ako je f dvaput derivabilna[a] na I, konveksnost je ekvivalentna s $f''(x) > 0$ za $x \in I$, konkavnost s $f''(x) < 0$ za $x \in I$.

[a] Zapravo, dodano druga derivacija mora biti neprekidna.

Zadatak

Ako je c nultočka neke funkcije f, mora li f u c mijenjati predznak?

Zadatak

Ako je c *nultočka neke funkcije* f, *mora li* f *u* c *mijenjati predznak? Može li* f *u nekoj točki* c *svoje domene promijeniti predznak bez da je* $f(c) = 0$?

Zadatak

Ako je c nultočka neke funkcije f, mora li f u c mijenjati predznak? Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?

Nultočka funkcije f je element c njezine domene takav da je $f(c) = 0$, odnosno takav da je $(c, 0)$ točka na grafu funkcije f.
Stacionarna točka funkcije f je

Zadatak

Ako je c nultočka neke funkcije f, mora li f u c mijenjati predznak? Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?

Nultočka funkcije f je element c njezine domene takav da je $f(c) = 0$, odnosno takav da je $(c, 0)$ točka na grafu funkcije f.
Stacionarna točka funkcije f je element c njezine domene koji je nultočka njezine derivacije, tj. takav da je tangenta u $(c, f(c))$ horizontalna.
Kao što funkcija ne mora promijeniti predznak u svojoj nultočki, tako i derivacija ne mora promijeniti predznak u stacionarnoj točki — u stacionarnoj točki može i ne mora doći do promjene rasta u pad ili obrnuto. Analogno, u stacionarnoj točki derivacije ne mora doći do promjene zakrivljenosti.

Lokalni ekstremi

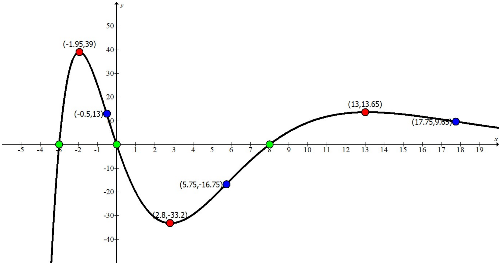
Kao što točke infleksije definiramo kao elemente domene u kojima dolazi do promjene konveksnosti u konkavnost ili obrnuto, točke lokalnih ekstrema *možemo* definirati kao

Lokalni ekstremi

Kao što točke infleksije definiramo kao elemente domene u kojima dolazi do promjene konveksnosti u konkavnost ili obrnuto, točke lokalnih ekstrema *možemo* definirati kao točke domene u kojima dolazi do promjene rasta u pad ili obrnuto. Lokalni ekstremi su iznosi funkcije u točkama lokalnih ekstrema. Zašto naglašavamo „lokalni"?

Lokalni ekstremi

Kao što točke infleksije definiramo kao elemente domene u kojima dolazi do promjene konveksnosti u konkavnost ili obrnuto, točke lokalnih ekstrema *možemo* definirati kao točke domene u kojima dolazi do promjene rasta u pad ili obrnuto. Lokalni ekstremi su iznosi funkcije u točkama lokalnih ekstrema. Zašto naglašavamo „lokalni“?Koje su točke lokalnih ekstrama i koji su lokalni ekstremi funkcije f s grafom na slici:



Sad *možemo reći* da su točke infleksije definirati i ovako: To su elementi domene funkcije koji su

Sad *možemo reći* da su točke infleksije definirati i ovako: To su elementi domene funkcije koji su točke lokalnih ekstrema njezine derivacije.

Sad *možemo reći* da su točke infleksije definirati i ovako: To su elementi domene funkcije koji su točke lokalnih ekstrema njezine derivacije.

Zadatak

Dajte primjere funkcija koje imaju stacionarnu točku koja nije točka lokalnog ekstrema i koja ima stacionarnu točku svoje derivacije koja nije točka infleksije.

Sad *možemo reći* da su točke infleksije definirati i ovako: To su elementi domene funkcije koji su točke lokalnih ekstrema njezine derivacije.

Zadatak

Dajte primjere funkcija koje imaju stacionarnu točku koja nije točka lokalnog ekstrema i koja ima stacionarnu točku svoje derivacije koja nije točka infleksije.

Teorem

Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f i ako postoji $f'(c)$, onda je $f'(c) = 0$. Drugim riječima: Ako $f'(c)$ postoji i $f'(c) \neq 0$, onda c sigurno nije točka lokalnog ekstrema.

Sad *možemo reći* da su točke infleksije definirati i ovako: To su elementi domene funkcije koji su točke lokalnih ekstrema njezine derivacije.

Zadatak

Dajte primjere funkcija koje imaju stacionarnu točku koja nije točka lokalnog ekstrema i koja ima stacionarnu točku svoje derivacije koja nije točka infleksije.

Teorem

Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f i ako postoji $f'(c)$, onda je $f'(c) = 0$. Drugim riječima: Ako $f'(c)$ postoji i $f'(c) \neq 0$, onda c sigurno nije točka lokalnog ekstrema.

Teorem

Ako je f (jednom, dvaput) derivabilna funkcija i c njezina stacionarna točka (ili stacionarna točka njezine derivacije), onda je c točka lokalnog ekstrema (odnosno točka infleksije) ako u njoj

Zadatak

Takozvana radijalna gustoće vjerojatnosti vodikove 2s-orbitale je funkcija definirana formulom

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad (r > 0),$$

gdje je $a_0 = 52{,}9$ pm. *Dokažite da* φ_{2s} *ima tri točke lokalnih ekstrema i četiri točke infleksije.*

Zadatak

Takozvana radijalna gustoće vjerojatnosti vodikove 2s-orbitale je funkcija definirana formulom

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad (r > 0),$$

gdje je $a_0 = 52{,}9\ \mathrm{pm}$. *Dokažite da* φ_{2s} *ima tri točke lokalnih ekstrema i četiri točke infleksije.*

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme i točke infleksije funkcije f *zadane formulom* $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ *i skicirajte njezin graf.*

Zadatak

Takozvana radijalna gustoće vjerojatnosti vodikove 2s-orbitale je funkcija definirana formulom

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad (r > 0),$$

gdje je $a_0 = 52{,}9$ pm. *Dokažite da* φ_{2s} *ima tri točke lokalnih ekstrema i četiri točke infleksije.*

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme i točke infleksije funkcije f *zadane formulom* $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ *i skicirajte njezin graf. Komentirajte prave definicije lokalnih ekstrema i točaka infleksije u usporedbi s onima koje smo izrekli s „možemo reći“.*

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Teorem

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f. Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f.

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Teorem

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f. Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f.

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije f koja zadovoljava sljedeće uvjete:

- *Domena joj je* $\langle -2, 2\rangle$;
- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ *za* $x < 1$, $f(x) < 0$ *za* $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ *za* $x < 0$, $f'(x) < 0$ *za* $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ *za* $x < -1$, $f''(x) < 0$ *za* $x > -1$.

Kritične točke

Primjer

Skicirajte graf funkcije apsolutne vrijednosti. Ima li ta funkcija točaka lokalnih ekstrema?

Kritične točke

Primjer

Skicirajte graf funkcije apsolutne vrijednosti. Ima li ta funkcija točaka lokalnih ekstrema? Kakva je derivacija te funkcije u 0*?*

Kritične točke

Primjer

Skicirajte graf funkcije apsolutne vrijednosti. Ima li ta funkcija točaka lokalnih ekstrema? Kakva je derivacija te funkcije u 0? Zaključite: Mora li točka lokalnog ekstrema funkcije biti njena stacionarna točka?

Definicija

Kritične točke *(„kandidati za točke lokalnih ekstrema") funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) su elementi $c \in D$ takvi da je (a) $f'(c) = 0$ (c je stacionarna točka od f) ili (b) $f'(c)$ ne postoji.*

Kritične točke

Primjer

Skicirajte graf funkcije apsolutne vrijednosti. Ima li ta funkcija točaka lokalnih ekstrema? Kakva je derivacija te funkcije u 0? Zaključite: Mora li točka lokalnog ekstrema funkcije biti njena stacionarna točka?

Definicija

Kritične točke *(„kandidati za točke lokalnih ekstrema“) funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) su elementi $c \in D$ takvi da je (a) $f'(c) = 0$ (c je stacionarna točka od f) ili (b) $f'(c)$ ne postoji.*

Zadatak

Odredite kritične točke funkcije $f : \langle -2, 2] \to \mathbb{R}$, zadane s:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 2x & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Postupak određivanja lokalnih ekstrema

1. Odredimo sve njezine kritične točke funkcije f.

Postupak određivanja lokalnih ekstrema

1. Odredimo sve njezine kritične točke funkcije f.
2. Za svaku kritičnu točku c zasebno provjeravamo radi li se o točki lokalnog ekstrema:
   - Provjerimo dolazi li u toj točki do promjene rast/pad (predznaka prve derivacije), ili
   - provjerimo pomoću $f''(c)$ (primjenjivo samo ako $f'(c) = 0$ i $f''(c) \neq 0$).

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ |\frac{1}{2}x^2 - 2| & -3 < x < 0 \\ \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ |\frac{1}{2}x^2 - 2| & -3 < x < 0 \\ \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e-x) & -\pi < x \leq 0 \\ \exp(-x) - 1, & x > 0 \end{cases}$$