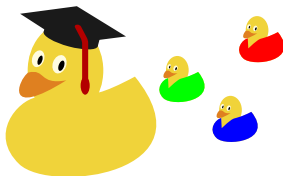


12. predavanje: Uvod u određene integrale. Nepostojanje derivacije.

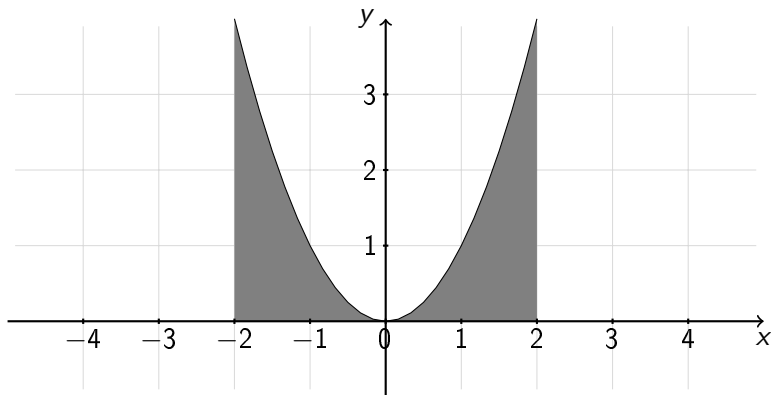
Franka Miriam Brückler



Problem površine

Primjer

Kolika je površina omeđena parabolom $y = x^2$ i pravcima $y = 0$, $x = -2$ i $x = 2$?



Određeni integral

Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nenegativna i elementarna ili po dijelovima zadana funkcija,

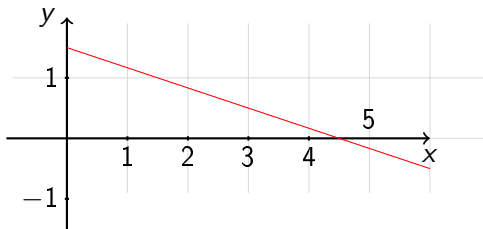
$$\int_a^b F(t) dt$$

je po iznosu jednak površini koju omeđuju graf funkcije F , os apscisa i vertikalni pravci $x = a$ i $x = b$ (a po fizikalnoj dimenziji jednak je umnošku fizikalnih dimenzija nezavisne i zavisne varijable).

Ako je F na području integriranja dijelom negativna, dijelovi navedene površine koji su ispod osi apscisa pribrajaju se s negativnim predznakom.

Primjer

$$\int_1^5 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3} \right) dx = 2.$$



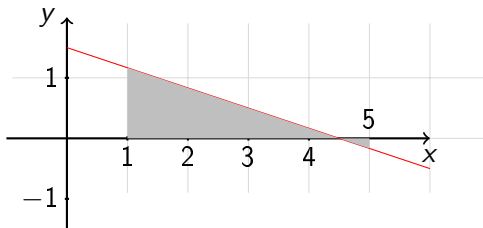
Zadatak

Izračunajte $\int_{-4}^2 (|1 - |1 + x|| - 2) dx$.

Što ako nam treba baš površina koju omeđuju graf funkcije F , os apscisa i vertikalni pravci $x = a$ i $x = b$?

Primjer

$$\int_1^5 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3} \right) dx = 2.$$



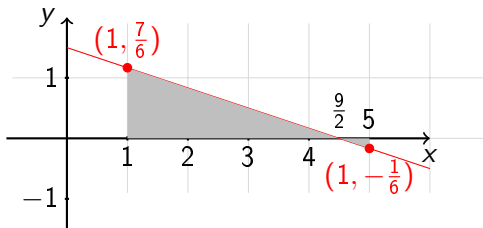
Zadatak

Izračunajte $\int_{-4}^2 (|1 - |1 + x|| - 2) dx$.

Što ako nam treba baš površina koju omeđuju graf funkcije F , os apscisa i vertikalni pravci $x = a$ i $x = b$?

Primjer

$$\int_1^5 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3} \right) dx = 2.$$



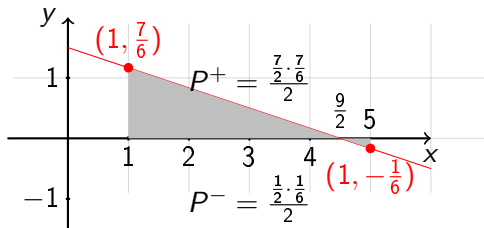
Zadatak

Izračunajte $\int_{-4}^2 (|1 - |1 + x|| - 2) dx$.

Što ako nam treba baš površina koju omeđuju graf funkcije F , os apscisa i vertikalni pravci $x = a$ i $x = b$?

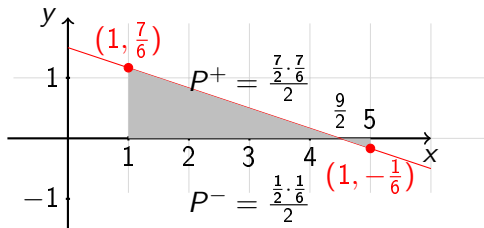
Primjer

$$\int_1^5 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3} \right) dx = 2.$$



Primjer

$$\int_1^5 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3} \right) dx = 2.$$

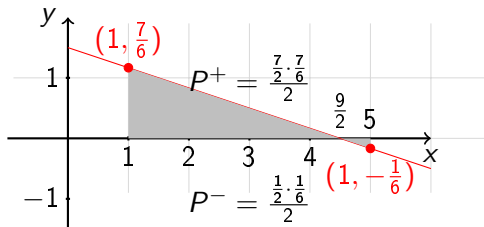


Zadatak

Izračunajte $\int_{-4}^2 (|1 - |1 + x|| - 2) dx$.

Primjer

$$\int_1^5 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3} \right) dx = 2.$$



Zadatak

Izračunajte $\int_{-4}^2 (|1 - |1 + x|| - 2) dx$.

Što ako nam treba baš površina koju omeđuju graf funkcije F , os apscisa i vertikalni pravci $x = a$ i $x = b$?

Osnovna svojstva određenih integrala

$$\int_a^a F(x) \, dx = 0, \quad \int_a^b F(x) \, dx = - \int_b^a F(x) \, dx$$

Osnovna svojstva određenih integrala

$$\int_a^a F(x) dx = 0, \quad \int_a^b F(x) dx = \int_b^a F(x) dx$$

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx.$$

Zadatak

Izračunajte

$$\int_0^5 F(x) dx$$

ako je $F(x) = x + n$ za $n \leq x < n + 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak

Funkcija signum, oznaka sgn , je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0. Izračunajte

$$\int_{-3}^3 \operatorname{sgn} x \, dx.$$

Zadatak

Funkcija signum, oznaka sgn , je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0. Izračunajte

$$\int_{-3}^3 \operatorname{sgn} x \, dx.$$

Ako je $F : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna i parna:

$$\int_{-c}^c F(t) \, dt = 0.$$

Zadatak

Funkcija signum, oznaka sgn , je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0. Izračunajte

$$\int_{-3}^3 \operatorname{sgn} x \, dx.$$

Ako je $F : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna i parna:

$$\int_{-c}^c F(t) \, dt = 0.$$

Ako je $F : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna i parna:

$$\int_{-c}^c F(t) \, dt = 2 \int_0^c F(t) \, dt.$$

Newton-Leibnizova formula

Za elementarnu funkciju $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i bilo koju njenu antiderivaciju f :

$$\int_a^b F(t) \, dt = f(b) - f(a).$$

Newton-Leibnizova formula

Za elementarnu funkciju $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i bilo koju njenu antiderivaciju f :

$$\int_a^b F(t) \, dt = f(b) - f(a).$$

Primjer

$$F(x) = \begin{cases} \exp(x), & x > 0 \\ x^3, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^2 F(x) \, dx = \int_{-2}^0 F(x) \, dx + \int_0^2 F(x) \, dx = e^2 - 5 :$$

$$\int_{-2}^0 F(x) \, dx = \int_{-2}^0 x^3 \, dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-2}^0 = -4,$$

$$\int_0^2 F(x) \, dx = \int_0^2 e^x \, dx = e^x \Big|_0^2 = e^2 - 1.$$

Posljedica Newton-Leibnizove formule je da su i određeni integrali (elementarnih) funkcija linearni.

Posljedica Newton-Leibnizove formule je da su i određeni integrali (elementarnih) funkcija linearni.

Newton-Leibnizova formula ne daje samo način da se izračuna određeni integral pomoću neodređenog, nego iskazuje i da se neodređeni može dobiti pomoću određenog:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t) dt.$$

Posljedica Newton-Leibnizove formule je da su i određeni integrali (elementarnih) funkcija linearni.

Newton-Leibnizova formula ne daje samo način da se izračuna određeni integral pomoću neodređenog, nego iskazuje i da se neodređeni može dobiti pomoću određenog:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t) dt.$$

Dakle, zapravo je samo jedan integral!

Zadatak

Definirajte prirodni logaritam pozitivnog broja x koristeći integrale!

Osnovne primjene integrala

- Računanje površina;

Osnovne primjene integrala

- Računanje površina;
- Određivanje ovisnosti $Y = Y(t)$ ako je poznata ovisnost brzine $V = V(t)$ promjene veličine Y :e

$$Y(t) = \int V(t) dt = Y(a) + \int_a^t V(\tau) d\tau.$$

Osnovne primjene integrala

- Računanje površina;
- Određivanje ovisnosti $Y = Y(t)$ ako je poznata ovisnost brzine $V = V(t)$ promjene veličine Y :

$$Y(t) = \int V(t) dt = Y(a) + \int_a^t V(\tau) d\tau.$$

- Određivanje mase objekta ako je njegova gustoća ρ ovisna o samo jednoj varijabli u danom rasponu:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Osnovne primjene integrala

- Računanje površina;
- Određivanje ovisnosti $Y = Y(t)$ ako je poznata ovisnost brzine $V = V(t)$ promjene veličine Y :

$$Y(t) = \int V(t) dt = Y(a) + \int_a^t V(\tau) d\tau.$$

- Određivanje mase objekta ako je njegova gustoća ρ ovisna o samo jednoj varijabli u danom rasponu:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

- Definicije raznih vrsta rada.

Osnovne primjene integrala

- Računanje površina;
- Određivanje ovisnosti $Y = Y(t)$ ako je poznata ovisnost brzine $V = V(t)$ promjene veličine Y :

$$Y(t) = \int V(t) dt = Y(a) + \int_a^t V(\tau) d\tau.$$

- Određivanje mase objekta ako je njegova gustoća ρ ovisna o samo jednoj varijabli u danom rasponu:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

- Definicije raznih vrsta rada.
- Promjene iznosa termodinamičkih funkcija.

Zadatak

Koliki put je do zaustavljanja prošla materijalna točka koja se giba pravocrtno po pravcu ako joj je u svakom trenutku $\tau = \frac{t}{s}$ brzina jednaka $9 - \tau^2$ m/s.

Zadatak

Koliki put je do zaustavljanja prošla materijalna točka koja se giba pravocrtno po pravcu ako joj je u svakom trenutku $\tau = \frac{t}{s}$ brzina jednaka $9 - \tau^2$ m/s.

Zadatak

Opruga ima prirodnu duljinu 20 cm, a da ju se rastegne na duljinu 30 cm potrebna je sila od 40 N. Znajući da je po Hookeovom zakonu iznos sile potrebne za rastezanje opruge proporcionalan promjeni duljine, koliki se rad izvrši za rastezanje te žice od 35 cm do 38 cm?

Zadatak

Koliki put je do zaustavljanja prošla materijalna točka koja se giba pravocrtno po pravcu ako joj je u svakom trenutku $\tau = \frac{t}{s}$ brzina jednaka $9 - \tau^2$ m/s.

Zadatak

Opruga ima prirodnu duljinu 20 cm, a da ju se rastegne na duljinu 30 cm potrebna je sila od 40 N. Znajući da je po Hookeovom zakonu iznos sile potrebne za rastezanje opruge proporcionalan promjeni duljine, koliki se rad izvrši za rastezanje te žice od 35 cm do 38 cm?

Zadatak

Koliki rad se pri konstantnoj množini i temperaturi izvrši pri kompresiji idealnog plina na trećinu početnog volumena?

O mehaničkom radu

$$w = \Delta E_k$$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x) dx = m \int_a^b \frac{dv}{dt} dx = \{ dx = v dt \} =$$

O mehaničkom radu

$$w = \Delta E_k$$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$\begin{aligned} w &= \int_a^b F(x) dx = m \int_a^b \frac{dv}{dt} dx = \{ dx = v dt \} = \\ &= m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_a}^{v_b} v dv = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_k. \end{aligned}$$

O mehaničkom radu

$$w = \Delta E_k$$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$\begin{aligned} w &= \int_a^b F(x) dx = m \int_a^b \frac{dv}{dt} dx = \{ dx = v dt \} = \\ &= m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_a}^{v_b} v dv = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_k. \end{aligned}$$

$$w = -\Delta V$$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x , onda mora postojati antiderivacija od F ,

O mehaničkom radu

$$w = \Delta E_k$$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$\begin{aligned} w &= \int_a^b F(x) dx = m \int_a^b \frac{dv}{dt} dx = \{ dx = v dt \} = \\ &= m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_a}^{v_b} v dv = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_k. \end{aligned}$$

$$w = -\Delta V$$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x , onda mora postojati antiderivacija od F , tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela.

O mehaničkom radu

$$w = \Delta E_k$$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$\begin{aligned} w &= \int_a^b F(x) dx = m \int_a^b \frac{dv}{dt} dx = \{ dx = v dt \} = \\ &= m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_a}^{v_b} v dv = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_k. \end{aligned}$$

$$w = -\Delta V$$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x , onda mora postojati antiderivacija od F , tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela. U tom je slučaju

$$w = \int_a^b F(x) dx = -V(b) - (-V(a)) = -\Delta V.$$

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo **konzerativnim silama**.

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo **konzerativnim silama**. U konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -Fx + C$)

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo **konzerativnim silama**. U konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -Fx + C$) i sila elastične opruge $F(x) = -kx$ ($V(x) = \frac{kx^2}{2} + C$).

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo **konzerativnim silama**. U konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -Fx + C$) i sila elastične opruge $F(x) = -kx$ ($V(x) = \frac{kx^2}{2} + C$).
Za takve sile kombinacija prethodna dva primjera daje

$$\Delta E_k = -\Delta V,$$

tj. zakon očuvanja energije.

Uočimo da se ne može definirati apsolutna ljestvica za potencijalnu energiju!

Nepostojanje derivacije

Primjer

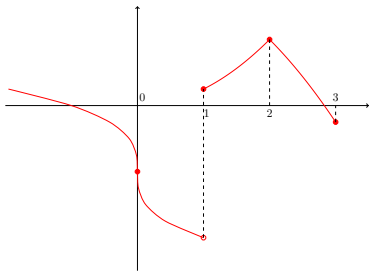
Koja je prirodna domena derivacije funkcije sedamnaestog korijena?

Nepostojanje derivacije

Primjer

Koja je prirodna domena derivacije funkcije sedamnaestog korijena?

Četiri su moguća uzroka nepostojanja $f'(c)$ za $c \in D_f$:

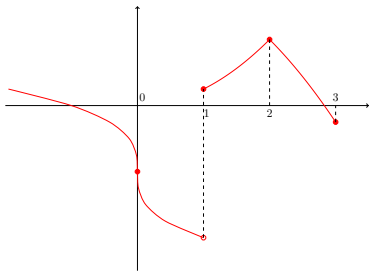


Nepostojanje derivacije

Primjer

Koja je prirodna domena derivacije funkcije sedamnaestog korijena?

Četiri su moguća uzroka nepostojanja $f'(c)$ za $c \in D_f$:



(vertikalna tangenta, pucanje grafa, špica, zatvoreni rub domene).

Zadatak

Nacrtajte graf funkcije za koju je $f'(1) = 0$, $f'(0) = 1$, a $f'(\frac{1}{2})$ ne postoji.