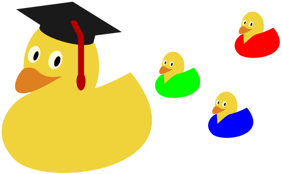
12. predavanje: Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable.

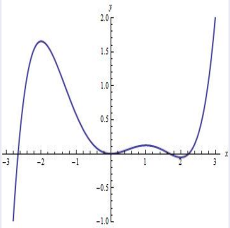
Franka Miriam Brückler



Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable

Zadatak

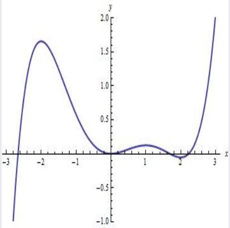
Pogledajte sljedeći graf neke funkcije f. Koje točke domene biste zvali točkama minimuma za f?



Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable

Zadatak

Pogledajte sljedeći graf neke funkcije f. Koje točke domene biste zvali točkama minimuma za f?



Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$*.Što možete reći o njezinim točkama ekstrema?*

- Koja je razlika u definicijama lokalnih i globalnih ekstrema?

- Koja je razlika u definicijama lokalnih i globalnih ekstrema?
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma?

- Koja je razlika u definicijama lokalnih i globalnih ekstrema?
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?

- Koja je razlika u definicijama lokalnih i globalnih ekstrema?
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?
- A može li funkcija imati više točaka globalnog maksimuma?

- Koja je razlika u definicijama lokalnih i globalnih ekstrema?
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?
- A može li funkcija imati više točaka globalnog maksimuma?
- Ako imamo samo jednu točku lokalnog minimuma/maksimuma, ona je ujedno i točka globalnog minimuma/maksimuma — točno ili ne?

- Koja je razlika u definicijama lokalnih i globalnih ekstrema?
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?
- A može li funkcija imati više točaka globalnog maksimuma?
- Ako imamo samo jednu točku lokalnog minimuma/maksimuma, ona je ujedno i točka globalnog minimuma/maksimuma — točno ili ne?
- Globalni minimum/maksimum je najmanji/najveći od svih lokalnih — točno ili ne?

- Koja je razlika u definicijama lokalnih i globalnih ekstrema?
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?
- A može li funkcija imati više točaka globalnog maksimuma?
- Ako imamo samo jednu točku lokalnog minimuma/maksimuma, ona je ujedno i točka globalnog minimuma/maksimuma — točno ili ne?
- Globalni minimum/maksimum je najmanji/najveći od svih lokalnih — točno ili ne?

Načelno, jedini način za određivanje globalnih ekstrema je analiza čitavog toka funkcije:

Zadatak

Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V *dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti* $r > 0$*:*

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}.$$

Pokažite da je Lennard-Jonesov potencijal najmanji kad je $r = r_{\min}$ *i da mu minimum iznosi* $-\varepsilon$*. Što preciznije, koristeći samo dosad obrađeno gradivo, skicirajte graf Lennard-Jonesovog potencijala.*

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna[a], onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

---

[a] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija *kojoj je domena segment* je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna[a], onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

[a] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija *kojoj je domena segment* je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.

Možete li predložiti postupak određivanja globalnih ekstrema za neprekidne funkcije zadane na segmentu?

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna[a], onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

[a] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija *kojoj je domena segment* je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.

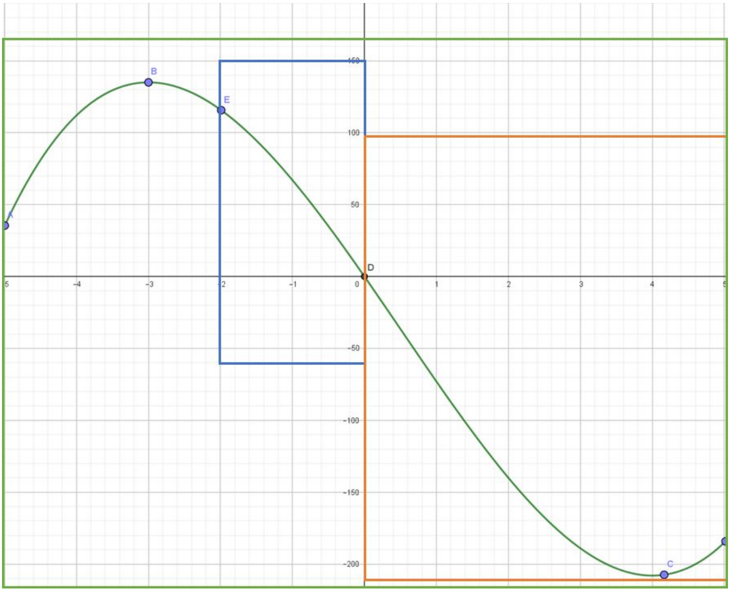
Možete li predložiti postupak određivanja globalnih ekstrema za neprekidne funkcije zadane na segmentu?

Zadatak

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom, ali s različitim domenama:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x,$$

$$D_1 = [-5, 5],\ D_2 = [0, 5],\ D_3 = [-2, 0],\ D_4 = \mathbb{R}$$



A
B
E
D
C
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

Zadatak

Pri dvofaznoj reverzibilnoj adijabatskoj kompresiji idealnog plina je iznos pV^γ *konstantan. Pritom je* $\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}$ *omjer izobarnog i izohornog molarnog toplinskog kapaciteta.*
Rad pri takvom procesu opisan je formulom

$$w = nRT\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{p_2}{p}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 2\right).$$

Pritom su p_1 *i* p_2 *početni odnosno konačni tlak, a* n, R, T, *i* $\gamma \in \langle 0, 1\rangle$ *su konstante.*
Pri kojem je tlaku izvršeni rad minimalan?

Zadatak

U kinetičkoj teoriji plinova se vjerojatnost da se molekula mase m pri temperaturi T kreće brzinom $v \geq 0$ opisuje Maxwell-Boltzmannovom funkcijom gustoće vjerojatnosti:

$$f_{MB}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Pritom je $k = \frac{R}{N_{\mathrm{A}}} = 1{,}38065 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ *Boltzmannova konstanta.*

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina dušikove molekule pri temperaturi $20^{\circ}\mathrm{C}$*? To matematički nema smisla!*

Ako je vjerojatnost da neko opažanje poprimi *bilo koji* iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $[0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0.

Ako je vjerojatnost da neko opažanje poprimi *bilo koji* iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $[0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0. Za svaku brzinu v iznos $f_{MB}(v)\Delta v$ ($\Delta v \approx 0$) procjenjuje vjerojatnost da je brzina molekule plina blizu v. Stoga postavljeno pitanje zapravo treba formulirati ovako:

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^* funkcije f_{MB} za molekulu poznate mase m pri temperaturi T.

Ako je vjerojatnost da neko opažanje poprimi *bilo koji* iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $[0, +\infty\rangle)$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0. Za svaku brzinu v iznos $f_{MB}(v)\Delta v$ ($\Delta v \approx 0$) procjenjuje vjerojatnost da je brzina molekule plina blizu v. Stoga postavljeno pitanje zapravo treba formulirati ovako:

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^* funkcije f_{MB} za molekulu poznate mase m pri temperaturi T.

Iznos v^* je brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno (nasumce) odabrana molekula promatranog plina pri danoj temperaturi ima brzinu *blizu* v^*.