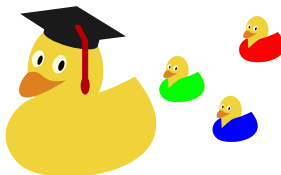


14. predavanje: Metoda supstitucije i rastav na parcijalne razlomke.

Franka Miriam Brückler



Metoda supstitucije

$$\int \sin(2x - 5) dx = ?$$

Metoda supstitucije

$$\int \sin(2x - 5) dx = ? \quad \int_0^1 \ln(2 - x) dx = ?$$

Metoda supstitucije

$$\int \sin(2x - 5) dx = ? \quad \int_0^1 \ln(2 - x) dx = ?$$

$$\int f(ax + b) dx = \{y = ax + b, dy = a dx\} = \frac{1}{a} \int f(y) dy$$

Metoda supstitucije

$$\int \sin(2x - 5) dx = ? \quad \int_0^1 \ln(2 - x) dx = ?$$

$$\int f(ax + b) dx = \{y = ax + b, dy = a dx\} = \frac{1}{a} \int f(y) dy$$

Općenito:

$$\int F(f(t)) y'(t) dt = \{y = f(t), dy = f'(t) dt\} = \int F(y) dy$$

$$\int_a^b F(f(t)) y'(t) dt = \{y = f(t), dy = f'(t) dt\} = \int_{f(a)}^{f(b)} F(y) dy$$

Metoda supstitucije

$$\int \sin(2x - 5) dx = ? \quad \int_0^1 \ln(2 - x) dx = ?$$

$$\int f(ax + b) dx = \{y = ax + b, dy = a dx\} = \frac{1}{a} \int f(y) dy$$

Općenito:

$$\int F(f(t)) y'(t) dt = \{y = f(t), dy = f'(t) dt\} = \int F(y) dy$$

$$\int_a^b F(f(t)) y'(t) dt = \{y = f(t), dy = f'(t) dt\} = \int_{f(a)}^{f(b)} F(y) dy$$

Izračunajte neodređene integrale od $2x \cos(x^2)$, $\frac{x}{x^2 - 6x + 9}$,

$\sin \sqrt{x}$, $\frac{1}{2x^2+3}$.

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo **pravom racionalnom funkcijom** ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo **pravom racionalnom funkcijom** ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroya polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo **pravom racionalnom funkcijom** ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroya polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo **rastaviti na parcijalne razlomke**. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroya više racionalnih funkcija?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo **pravom racionalnom funkcijom** ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroya polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo **rastaviti na parcijalne razlomke**. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroya više racionalnih funkcija? Koja su dva osnovna oblika parcijalnih razlomaka?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo **pravom racionalnom funkcijom** ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroya polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo **rastaviti na parcijalne razlomke**. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroya više racionalnih funkcija? Koja su dva osnovna oblika parcijalnih razlomaka?

$$\frac{A}{(x - c)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k},$$

pri čemu drugi oblik dolazi u obzir samo ako je

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo **pravom racionalnom funkcijom** ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroya polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo **rastaviti na parcijalne razlomke**. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroya više racionalnih funkcija? Koja su dva osnovna oblika parcijalnih razlomaka?

$$\frac{A}{(x - c)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k},$$

pri čemu drugi oblik dolazi u obzir samo ako je $p^2 < 4q$.

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.
Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R .

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.

Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R .

Ako nazivnik ima onoliko različitih realnih nultočaka koliki mu je stupanj, što nam to govori o njihovim kratnostima?

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.

Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R .

Ako nazivnik ima onoliko različitih realnih nultočaka koliki mu je stupanj, što nam to govori o njihovim kratnostima? Svaka od tih nultočaka c doprinosi po jednim parcijalnim razlomkom tipa $\frac{A}{x-c}$. Za funkciju R zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke njezinog pravog racionalnog dijela. Kako odrediti iznose konstanti A u tim razlomcima?

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.

Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R .

Ako nazivnik ima onoliko različitih realnih nultočaka koliki mu je stupanj, što nam to govori o njihovim kratnostima? Svaka od tih nultočaka c doprinosi po jednim parcijalnim razlomkom tipa $\frac{A}{x-c}$. Za funkciju R zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke njezinog pravog racionalnog dijela. Kako odrediti iznose konstanti A u tim razlomcima?

Zadatak

$$R(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{1/2}{x - 1} + \frac{1/2}{x + 1};$$

$$\int_{-5}^{-2} R(x) dx = ?$$

Rastav na parcijalne razlomke #2 🎓

Ako nazivnik racionalne funkcije ima isključivo realne nultočke, tj. zbroj kratnosti svih realnih nultočaka jednak je

Rastav na parcijalne razlomke #2 🎓

Ako nazivnik racionalne funkcije ima isključivo realne nultočke, tj. zbroj kratnosti svih realnih nultočaka jednak je stupnju nazivnika, onda svaka realna nultočka c određuje onoliko parcijalnih razlomaka tipa $\frac{A}{(x-c)^k}$ kolika joj je kratnost — redom s $k = 1, 2, \dots$

Rastav na parcijalne razlomke #2

Ako nazivnik racionalne funkcije ima isključivo realne nultočke, tj. zbroj kratnosti svih realnih nultočaka jednak je stupnju nazivnika, onda svaka realna nultočka c određuje onoliko parcijalnih razlomaka tipa $\frac{A}{(x-c)^k}$ kolika joj je kratnost — redom s $k = 1, 2, \dots$

Zadatak

$$\int \frac{15x^4 - x^3 + 6x^2 - 18}{5x^3 - 2x^2} dx = ?$$

Rastav na parcijalne razlomke #3

Ako se nazivnik racionalne funkcije ne može do kraja faktorizirati na afine faktore, tj. ima i ne-realnih nultočaka, dakle u faktoriziranom obliku

Rastav na parcijalne razlomke #3

Ako se nazivnik racionalne funkcije ne može do kraja faktorizirati na affine faktore, tj. ima i ne-realnih nultočaka, dakle u faktoriziranom obliku sadrži i kvadratne faktore $t^2 + p t + q$ bez realnih nultočaka ($p^2 < 4q$), onda svaki takav faktor određuje onoliko parcijalnih razlomaka $\frac{B x + C}{(t^2 + p t + q)^k}$ s kolikom se potencijom pojavljuje u faktoriziranom obliku — redom s $k = 1, 2, \dots$

Rastav na parcijalne razlomke #3

Ako se nazivnik racionalne funkcije ne može do kraja faktorizirati na afine faktore, tj. ima i ne-realnih nultočaka, dakle u faktoriziranom obliku sadrži i kvadratne faktore $t^2 + pxt + q$ bez realnih nultočaka ($p^2 < 4q$), onda svaki takav faktor određuje onoliko parcijalnih razlomaka $\frac{Bx+C}{(t^2+px+q)^k}$ s kolikom se potencijom pojavljuje u faktoriziranom obliku — redom s $k = 1, 2, \dots$

Zadatak

$$\int \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} dx = ?$$

Rastav na parcijalne razlomke #3

Ako se nazivnik racionalne funkcije ne može do kraja faktorizirati na afine faktore, tj. ima i ne-realnih nultočaka, dakle u faktoriziranom obliku sadrži i kvadratne faktore $t^2 + pxt + q$ bez realnih nultočaka ($p^2 < 4q$), onda svaki takav faktor određuje onoliko parcijalnih razlomaka $\frac{Bx+C}{(t^2+pxt+q)^k}$ s kolikom se potencijom pojavljuje u faktoriziranom obliku — redom s $k = 1, 2, \dots$

Zadatak

$$\int \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} dx = ?$$

Zadatak

Izračunajte $\int_0^1 \frac{\exp(x) dx}{(\exp(x) + 1)(\exp(x) + 2)}.$