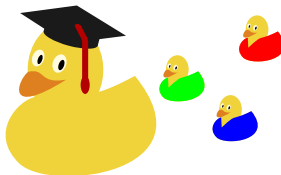


# 16. predavanje: Polarne koordinate u ravnini.

*Franka Miriam Brückler*

---



# Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo opisati pomoću dva realna broja?

# Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo opisati pomoću dva realna broja?
- Polarne koordinate točke u ravnini  $r$  (polarna udaljenost) i  $\varphi$  (polarni kut) mogu poprimiti koje iznose?

# Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo opisati pomoću dva realna broja?
- Polarne koordinate točke u ravnini  $r$  (polarna udaljenost) i  $\varphi$  (polarni kut) mogu poprimati koje iznose?
- Jednadžba  $r = 3$  u polarnom koordinatnom sustavu predstavlja

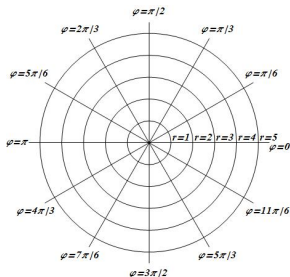
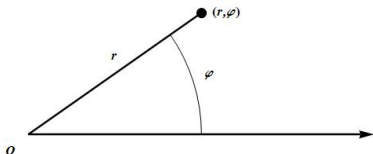
# Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo opisati pomoću dva realna broja?
- Polarne koordinate točke u ravnini  $r$  (polarna udaljenost) i  $\varphi$  (polarni kut) mogu poprimati koje iznose?
- Jednadžba  $r = 3$  u polarnom koordinatnom sustavu predstavlja kružnicu, a jednadžba  $\varphi = 1$  predstavlja

# Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo opisati pomoću dva realna broja?
- Polarne koordinate točke u ravnini  $r$  (polarna udaljenost) i  $\varphi$  (polarni kut) mogu poprimiti koje iznose?
- Jednadžba  $r = 3$  u polarnom koordinatnom sustavu predstavlja kružnicu, a jednadžba  $\varphi = 1$  predstavlja polupravac s početkom u ishodištu koji s polarnom osi zatvara kut iznosa 1.

$$(r, \varphi); r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$



- Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama  $(r, \varphi) = (0, 0)$ ?  $(1, 0)$ ?  $(0, 1)$ ?  $(-1, 0)$ ?  $(1, \pi/2)$ ,  $(2, \pi/3)$ ?  $(1, -\pi/3)$ ?  $(\pi, 45^\circ)$ ?

- Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama  $(r, \varphi) = (0, 0)$ ?  $(1, 0)$ ?  $(0, 1)$ ?  $(-1, 0)$ ?  $(1, \pi/2)$ ,  $(2, \pi/3)$ ?  $(1, -\pi/3)$ ?  $(\pi, 45^\circ)$ ?
- Šrafirajte dio ravnine koji u polarnom koordinatnom sustavu ima obje koordinate između 0 i 1.

- Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama  $(r, \varphi) = (0, 0)$ ?  $(1, 0)$ ?  $(0, 1)$ ?  $(-1, 0)$ ?  $(1, \pi/2)$ ,  $(2, \pi/3)$ ?  $(1, -\pi/3)$ ?  $(\pi, 45^\circ)$ ?
- Šrafirajte dio ravnine koji u polarnom koordinatnom sustavu ima obje koordinate između 0 i 1.

Uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i polarne osi koja se poklapa s pozitivnim dijelom osi apscisa, **veza između Kartezijevih i polarnih koordinata** točke u ravnini opisana je s:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Koje su polarne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate  $(-2, 2)$ ?

# Polarne jednadžbe krivulja u ravnini

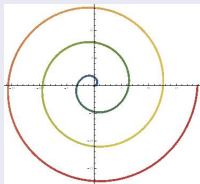
## Primjer

*Zadan je polupravac  $o$  s početkom u ishodištu  $O$ . Točka se od  $O$  jednoliko giba po  $o$ , a pritom  $o$  jednoliko rotira oko  $O$ , dakle je u svakom trenutku*

# Polarne jednađbe krivulja u ravnini 🐣

## Primjer

Zadan je polupravac  $o$  s početkom u ishodištu  $O$ . Točka se od  $O$  jednoliko giba po  $o$ , a pritom  $o$  jednoliko rotira oko  $O$ , dakle je u svakom trenutku  $r = a\varphi$ . To je jednađba **Arhimedove spirale**.



## Zadatak

Skicirajte nekoliko točaka hiperboličke spirale zadane jednađbom  $r = 1/\varphi$ . Možete li naslutiti njen oblik?

## Zadatak

*Što možete zaključiti o izgledu krivulje  $r = f(\varphi)$  ako je  $f$  neparna?*

### Zadatak

*Što možete zaključiti o izgledu krivulje  $r = f(\varphi)$  ako je  $f$  neparna?  
Ni za koju točku krivulje njoj zrcalno simetrična točka  
s obzirom na polarnu os nije na krivulji.*

### Zadatak

*Skicirajte krivulju koja ima polarnu jednadžbu  $r = 1 + 2 \cos 3\varphi$ .*

## Zadatak

Što možete zaključiti o izgledu krivulje  $r = f(\varphi)$  ako je  $f$  neparna?  
Ni za koju točku krivulje njoj zrcalno simetrična točka  
s obzirom na polarnu os nije na krivulji.

## Zadatak

Skicirajte krivulju koja ima polarnu jednadžbu  $r = 1 + 2 \cos 3\varphi$ .

- **periodičnost**  $r = f(\varphi)$  ( $T = 2k\pi$ ):  $f$  je periodična i temeljni period joj je  $120^\circ$ , dakle posjeduje rotacijsku simetriju reda 3 i zatvorena je.

## Zadatak

Što možete zaključiti o izgledu krivulje  $r = f(\varphi)$  ako je  $f$  neparna?  
Ni za koju točku krivulje njoj zrcalno simetrična točka  
s obzirom na polarnu os nije na krivulji.

## Zadatak

Skicirajte krivulju koja ima polarnu jednadžbu  $r = 1 + 2 \cos 3\varphi$ .

- **periodičnost**  $r = f(\varphi)$  ( $T = 2k\pi$ )?:  $f$  je periodična i temeljni period joj je  $120^\circ$ , dakle posjeduje rotacijsku simetriju reda 3 i zatvorena je.
- **$r \geq (=) 0$** : Točke krivulje imamo za  $-40^\circ + k 120^\circ \leq \varphi \leq 40^\circ + k 120^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (u ishodištu smo za  $\pm 40^\circ + k 120^\circ$ ).

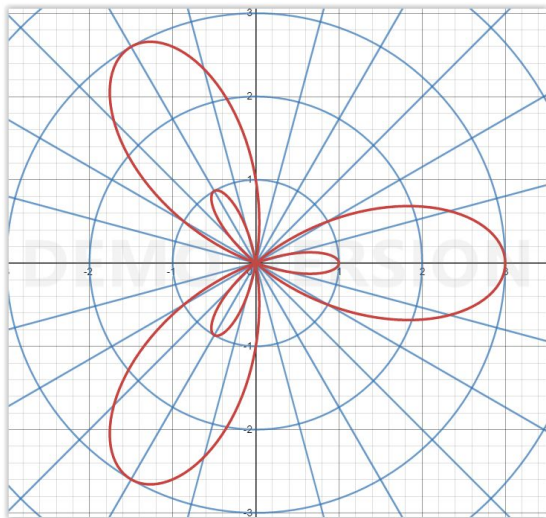
## Zadatak

Što možete zaključiti o izgledu krivulje  $r = f(\varphi)$  ako je  $f$  neparna?  
Ni za koju točku krivulje njoj zrcalno simetrična točka  
s obzirom na polarnu os nije na krivulji.

## Zadatak

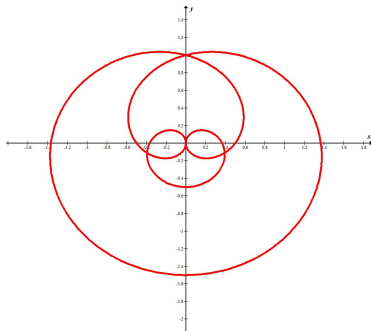
Skicirajte krivulju koja ima polarnu jednadžbu  $r = 1 + 2 \cos 3\varphi$ .

- **periodičnost**  $r = f(\varphi)$  ( $T = 2k\pi$ )?:  $f$  je periodična i temeljni period joj je  $120^\circ$ , dakle posjeduje rotacijsku simetriju reda 3 i zatvorena je.
- **$r \geq (=) 0$** : Točke krivulje imamo za  $-40^\circ + k 120^\circ \leq \varphi \leq 40^\circ + k 120^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (u ishodištu smo za  $\pm 40^\circ + k 120^\circ$ ).
- **raspon**  $r$ ?:  $0 \leq r \leq 3$ , dakle je krivulja unutar kružnice polumjera 3.
- **parnost**  $r = f(\varphi)$ ?:  $f$  je simetrična s obzirom na polarnu os.



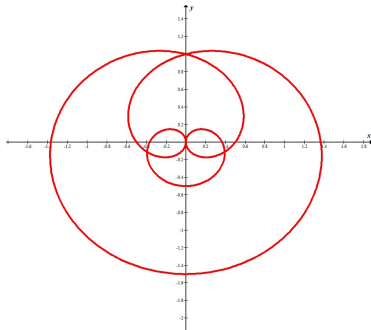
## Zadatak

Što možete zaključiti o funkciji  $f$  ako znate da je  $r = f(\varphi)$  jednačina krivulje na slici u polarnim koordinatama?



## Zadatak

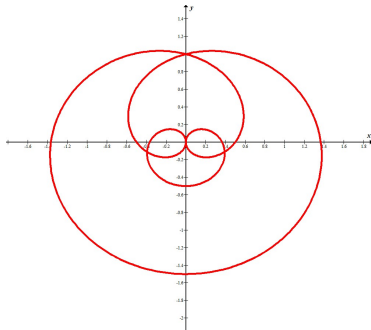
Što možete zaključiti o funkciji  $f$  ako znate da je  $r = f(\varphi)$  jednačina krivulje na slici u polarnim koordinatama?



- $f$  je periodična i temeljni period joj je višekratnik od  $2\pi$ ,  
točnije

## Zadatak

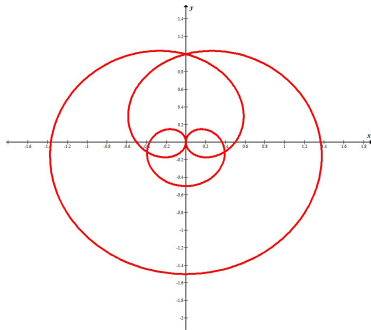
Što možete zaključiti o funkciji  $f$  ako znate da je  $r = f(\varphi)$  jednačina krivulje na slici u polarnim koordinatama?



- $f$  je periodična i temeljni period joj je višekratnik od  $2\pi$ , točnije  $6\pi$ ;

## Zadatak

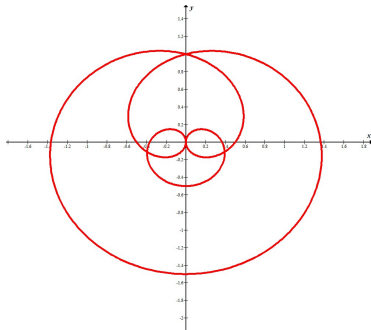
Što možete zaključiti o funkciji  $f$  ako znate da je  $r = f(\varphi)$  jednačina krivulje na slici u polarnim koordinatama?



- $f$  je periodična i temeljni period joj je višekratnik od  $2\pi$ , točnije  $6\pi$ ;
- $f(\varphi) \geq 0$  za sve  $\varphi$  i

## Zadatak

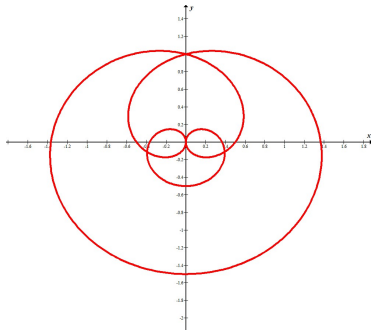
Što možete zaključiti o funkciji  $f$  ako znate da je  $r = f(\varphi)$  jednačina krivulje na slici u polarnim koordinatama?



- $f$  je periodična i temeljni period joj je višekratnik od  $2\pi$ , točnije  $6\pi$ ;
- $f(\varphi) \geq 0$  za sve  $\varphi$  i  $f(\varphi) \leq 1,5$  za za sve  $\varphi$ ;

## Zadatak

Što možete zaključiti o funkciji  $f$  ako znate da je  $r = f(\varphi)$  jednačba krivulje na slici u polarnim koordinatama?



- $f$  je periodična i temeljni period joj je višekratnik od  $2\pi$ , točnije  $6\pi$ ;
- $f(\varphi) \geq 0$  za sve  $\varphi$  i  $f(\varphi) \leq 1,5$  za za sve  $\varphi$ ;
- $f$  nije parna, ali je neparna.

## Zadatak

*Izvedite formulu za koeficijent smjera tangente na krivulju  $r = f(\varphi)$ .*

### Zadatak

Izvedite formulu za koeficijent smjera tangente na krivulju  $r = f(\varphi)$ .

$$k = \frac{r_0 + r'(\varphi_0) \operatorname{tg} \varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0 \operatorname{tg} \varphi_0}.$$

### Zadatak

Koji je koeficijent smjera tangente na Arhimedovu spiralu s parametrom  $a = 5$  u njenoj točki određenoj polarnim kutom  $60^\circ$ .