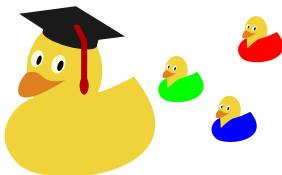


16. predavanje: Interpretacija predznaka prve i druge derivacije. Lokalni ekstremi i točke infleksije.

Franka Miriam Brückler



Predznak prve derivacije

Dana je realna funkcija jedne varijable $y = f(x)$ i njezin je graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Što za c iz njene domene predstavljaju brojevi $f(c)$ i $f'(c)$?

Predznak prve derivacije

Dana je realna funkcija jedne varijable $y = f(x)$ i njezin je graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Što za c iz njene domene predstavljaju brojevi $f(c)$ i $f'(c)$?
Što za graf funkcije znači ako znamo da je na nekom intervalu ona pozitivna,

Predznak prve derivacije

Dana je realna funkcija jedne varijable $y = f(x)$ i njezin je graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Što za c iz njene domene predstavljaju brojevi $f(c)$ i $f'(c)$?
Što za graf funkcije znači ako znamo da je na nekom intervalu ona pozitivna, negativna

Predznak prve derivacije

Dana je realna funkcija jedne varijable $y = f(x)$ i njezin je graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Što za c iz njene domene predstavljaju brojevi $f(c)$ i $f'(c)$?

Što za graf funkcije znači ako znamo da je na nekom intervalu ona pozitivna, negativna ili jednaka nuli?

Predznak prve derivacije

Dana je realna funkcija jedne varijable $y = f(x)$ i njezin je graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Što za c iz njene domene predstavljaju brojevi $f(c)$ i $f'(c)$?

Što za graf funkcije znači ako znamo da je na nekom intervalu ona pozitivna, negativna ili jednaka nuli?

Ako je $f'(c) > 0$, onda

Predznak prve derivacije

Dana je realna funkcija jedne varijable $y = f(x)$ i njezin je graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Što za c iz njene domene predstavljaju brojevi $f(c)$ i $f'(c)$?

Što za graf funkcije znači ako znamo da je na nekom intervalu ona pozitivna, negativna ili jednaka nuli?

Ako je $f'(c) > 0$, onda f na nekom intervalu oko c raste, a ako je $f'(c) < 0$, onda

Predznak prve derivacije

Dana je realna funkcija jedne varijable $y = f(x)$ i njezin je graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Što za c iz njene domene predstavljaju brojevi $f(c)$ i $f'(c)$?

Što za graf funkcije znači ako znamo da je na nekom intervalu ona pozitivna, negativna ili jednaka nuli?

Ako je $f'(c) > 0$, onda f na nekom intervalu oko c raste, a ako je $f'(c) < 0$, onda f na nekom intervalu oko c pada.

- Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in I$, onda f raste na I (i obrnuto).
- Ako je $f'(x) < 0$ za $x \in I$, onda f pada na I (i obrnuto).

Primjer

Brzina reakcije je uvijek pozitivna:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Primjer

Brzina reakcije je uvijek pozitivna:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Zadatak

Odredite stacionarne točke, intervale rasta i pada za funkciju

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2).$$

Primjer

Brzina reakcije je uvijek pozitivna:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Zadatak

Odredite stacionarne točke, intervale rasta i pada za funkciju

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2).$$

Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)?

Primjer

Brzina reakcije je uvijek pozitivna:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Zadatak

Odredite stacionarne točke, intervale rasta i pada za funkciju

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2).$$

Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)? A ako usporava?

Primjer

Brzina reakcije je uvijek pozitivna:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Zadatak

Odredite stacionarne točke, intervale rasta i pada za funkciju

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2).$$

Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)? A ako usporava? A ako se giba s konstantnom brzinom?

Primjer

Brzina reakcije je uvijek pozitivna:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Zadatak

Odredite stacionarne točke, intervale rasta i pada za funkciju

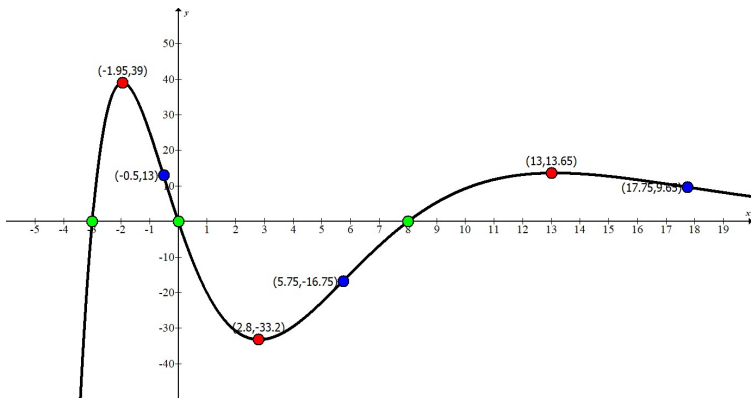
$$f(x) = x^2 - \ln(x^2).$$

Zadatak

Kako izgledaju grafovi ovisnosti puta i brzine materijalne točke o vremenu ako se materijalna točka giba ubrzano (po pravcu)? A ako usporava? A ako se giba s konstantnom brzinom? Kakva je veza između triju funkcija $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$?

Zadatak

Neka je s $g(x)$ definiran iznos koeficijenta smjera tangente na graf funkcije f (slika dolje) u točki $(x, f(x))$. Kako izgleda graf od g ?



Predznak druge derivacije

Predznak druge derivacije f'' nam govori o rastu ili padu prve derivacije f' :

- Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I ,

Predznak druge derivacije

Predznak druge derivacije f'' nam govori o rastu ili padu prve derivacije f' :

- Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje padajuće odnosno sve više rastuće:

Predznak druge derivacije

Predznak druge derivacije f'' nam govori o rastu ili padu prve derivacije f' :

- Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje padajuće odnosno sve više rastuće: Graf je udubljen. Kažemo da je f **konveksna** na I .

Predznak druge derivacije

Predznak druge derivacije f'' nam govori o rastu ili padu prve derivacije f' :

- Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje padajuće odnosno sve više rastuće: Graf je udubljen. Kažemo da je f **konveksna** na I .
- Ako je $f''(x) < 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I ,

Predznak druge derivacije

Predznak druge derivacije f'' nam govori o rastu ili padu prve derivacije f' :

- Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje padajuće odnosno sve više rastuće: Graf je udubljen. Kažemo da je f **konveksna** na I .
- Ako je $f''(x) < 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje rastuće odnosno sve više padajuće:

Predznak druge derivacije

Predznak druge derivacije f'' nam govori o rastu ili padu prve derivacije f' :

- Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje padajuće odnosno sve više rastuće: Graf je udubljen. Kažemo da je f **konveksna** na I .
- Ako je $f''(x) < 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje rastuće odnosno sve više padajuće: Graf je ispupčen. Kažemo da je f **konkavna** na I .

Predznak druge derivacije

Predznak druge derivacije f'' nam govori o rastu ili padu prve derivacije f' :

- Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje padajuće odnosno sve više rastuće: Graf je udubljen. Kažemo da je f **konveksna** na I .
- Ako je $f''(x) < 0$ za $x \in I$, onda f' raste na I , dakle su tangente sve manje rastuće odnosno sve više padajuće: Graf je ispupčen. Kažemo da je f **konkavna** na I .

Zadatak

Za funkciju f čiji graf je na prošlom slide-u odredite intervale pozitivnosti i negativnosti od f , f' i f'' .

- Možemo li iz $f'' > 0$ na I zaključiti išta o rastu, padu, pozitivnosti, negativnosti funkcije f ?

- Možemo li iz $f'' > 0$ na I zaključiti išta o rastu, padu, pozitivnosti, negativnosti funkcije f ?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!

- Možemo li iz $f'' > 0$ na I zaključiti išta o rastu, padu, pozitivnosti, negativnosti funkcije f ?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!
- Kako izgleda graf funkcije f s domenom $\langle 0, 1 \rangle$ ako je za sve x iz domene $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$?

- Možemo li iz $f'' > 0$ na I zaključiti išta o rastu, padu, pozitivnosti, negativnosti funkcije f ?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!
- Kako izgleda graf funkcije f s domenom $\langle 0, 1 \rangle$ ako je za sve x iz domene $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$?
- Nadopunite tablicu skicama koje sugeriraju pravila:

na I	+	-
f		
f'		
f''		

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne imaju pozitivnu/negativnu prvu/drugu derivaciju.

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne imaju pozitivnu/negativnu prvu/drugu derivaciju.

Teorem

Ako je f derivabilna^a na I , rast je ekvivalentan s $f'(x) > 0$ za $x \in I$, a pad s $f'(x) < 0$ za $x \in I$.

Ako je f dvaput derivabilna^b na I , konveksnost je ekvivalentna s $f''(x) > 0$ za $x \in I$, konkavnost s $f''(x) < 0$ za $x \in I$.

^aZapravo, derivacija mora biti neprekidna.

^bZapravo, dodano druga derivacija mora biti neprekidna.

Zadatak

Ako je c nultočka neke funkcije f , mora li f u c mijenjati predznak?

Zadatak

*Ako je c nultočka neke funkcije f , mora li f u c mijenjati predznak?
Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?*

Zadatak

*Ako je c nultočka neke funkcije f , mora li f u c mijenjati predznak?
Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?*

Nultočka funkcije f je

Zadatak

*Ako je c nultočka neke funkcije f , mora li f u c mijenjati predznak?
Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?*

Nultočka funkcije f je element c njezine domene takav da je $f(c) = 0$,

Zadatak

*Ako je c nultočka neke funkcije f , mora li f u c mijenjati predznak?
Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?*

Nultočka funkcije f je element c njezine domene takav da je $f(c) = 0$, odnosno takav da je $(c, 0)$ točka na grafu funkcije f .

Stacionarna točka funkcije f je

Zadatak

*Ako je c nultočka neke funkcije f , mora li f u c mijenjati predznak?
Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?*

Nultočka funkcije f je element c njezine domene takav da je $f(c) = 0$, odnosno takav da je $(c, 0)$ točka na grafu funkcije f .

Stacionarna točka funkcije f je nultočka njezine derivacije,

Zadatak

Ako je c nultočka neke funkcije f , mora li f u c mijenjati predznak? Može li f u nekoj točki c svoje domene promijeniti predznak bez da je $f(c) = 0$?

Nultočka funkcije f je element c njezine domene takav da je $f(c) = 0$, odnosno takav da je $(c, 0)$ točka na grafu funkcije f .

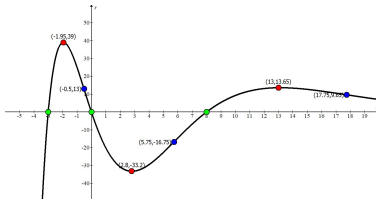
Stacionarna točka funkcije f je nultočka njezine derivacije, tj. takav c da je tangenta u $(c, f(c))$ horizontalna.

Kao što funkcija ne mora promijeniti predznak u svojoj nultočki, tako i derivacija ne mora promijeniti predznak u stacionarnoj točki — u stacionarnoj točki može i ne mora doći do promjene rasta u pad ili obrnuto. Analogno, u stacionarnoj točki prve derivacije ne mora doći do promjene zakrivljenosti.

Lokalni ekstremi

Zadatak

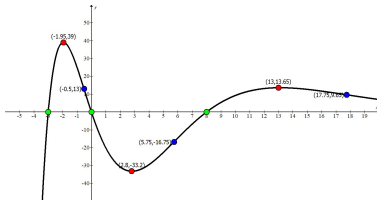
Kako biste upisali uloge točaka različitih boja za funkciju s grafom:



Lokalni ekstremi

Zadatak

Kako biste upisali uloge točaka različitih boja za funkciju s grafom:

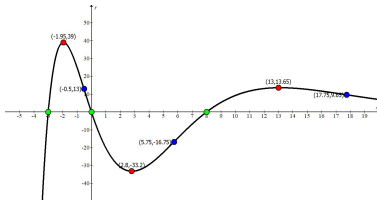


Točka lokalnog minimuma (maksimuma) funkcije f je element c njezine domene D takav da je $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$) za sve $x \in I \cap D$, gdje je I neki otvoren interval koji sadrži c . Lokalni minimum (maksimum) je onda iznos $f(c)$.

Lokalni ekstremi

Zadatak

Kako biste upisali uloge točaka različitih boja za funkciju s grafom:

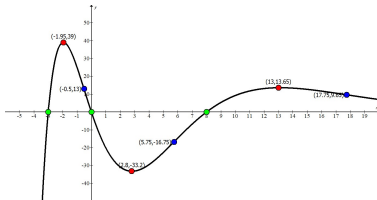


Točka lokalnog minimuma (maksimuma) funkcije f je element c njezine domene D takav da je $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$) za sve $x \in I \cap D$, gdje je I neki otvoren interval koji sadrži c . **Lokalni minimum (maksimum)** je onda iznos $f(c)$. Ako je f derivabilna u c , c je točka lokalnog ekstrema ako u njoj dolazi do promjene rasta u pad ili obrnuto.

Lokalni ekstremi

Zadatak

Kako biste upisali uloge točaka različitih boja za funkciju s grafom:



Točka lokalnog minimuma (maksimuma) funkcije f je element c njezine domene D takav da je $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$) za sve $x \in I \cap D$, gdje je I neki otvoren interval koji sadrži c . **Lokalni minimum (maksimum)** je onda iznos $f(c)$. Ako je f derivabilna u c , c je točka lokalnog ekstrema ako u njoj dolazi do promjene rasta u pad ili obrnuto.

Točke infleksije

Točka infleksije funkcije f je element c njezine domene D u kojem dolazi do promjene konveksnosti u konkavnost (ako je f dvaput derivabilna u c to znači da je točka infleksije točka lokalnog ekstrema od f').

Zadatak

Dajte primjere funkcija koje imaju stacionarnu točku koja nije točka lokalnog ekstrema i koja imaju stacionarnu točku svoje derivacije koja nije točka infleksije.

Točke infleksije

Točka infleksije funkcije f je element c njezine domene D u kojem dolazi do promjene konveksnosti u konkavnost (ako je f dvaput derivabilna u c to znači da je točka infleksije točka lokalnog ekstrema od f').

Zadatak

Dajte primjere funkcija koje imaju stacionarnu točku koja nije točka lokalnog ekstrema i koja imaju stacionarnu točku svoje derivacije koja nije točka infleksije.

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije $f : \langle -2, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ za koju je:

- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ za $x < 1$, $f(x) < 0$ za $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ za $x < 0$, $f'(x) < 0$ za $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ za $x < -1$, $f''(x) < 0$ za $x > -1$.

Zadatak

Takozvana radijalna gustoće vjerojatnosti vodikove 2s-orbitale je funkcija definirana formulom

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad (r > 0),$$

gdje je $a_0 = 52,9$ pm. Dokažite da φ_{2s} ima tri točke lokalnih ekstrema i četiri točke infleksije.

Zadatak

Takozvana radijalna gustoće vjerojatnosti vodikove 2s-orbitale je funkcija definirana formulom

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad (r > 0),$$

gdje je $a_0 = 52,9$ pm. Dokažite da φ_{2s} ima tri točke lokalnih ekstrema i četiri točke infleksije.

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme i točke infleksije funkcije f zadane formulom $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ i skicirajte njezin graf. Komentirajte prave definicije lokalnih ekstrema i točaka infleksije u usporedbi s onima koje smo izrekli uz pretpostavke o derivabilnosti.

Primjer

Skicirajte graf funkcije apsolutne vrijednosti. Ima li ta funkcija točaka lokalnih ekstrema?

Primjer

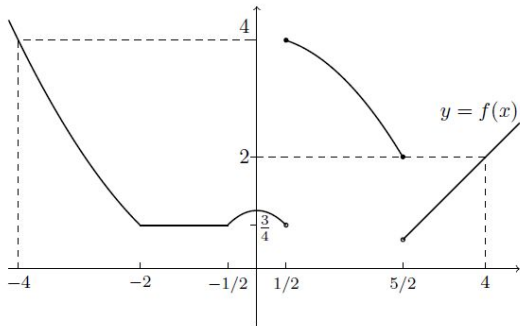
Skicirajte graf funkcije apsolutne vrijednosti. Ima li ta funkcija točaka lokalnih ekstrema? Kakva je derivacija te funkcije u 0?

Primjer

Skicirajte graf funkcije apsolutne vrijednosti. Ima li ta funkcija točaka lokalnih ekstrema? Kakva je derivacija te funkcije u 0?

Primjer

Na slici dolje je graf jedne funkcije. Koje su joj točke lokalnih ekstrema? Točke infleksije?



Kritične točke

Kritične točke („kandidati za točke lokalnih ekstrema“) funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) su elementi $c \in D$ takvi da je c stacionarna točka od f) ili $f'(c)$ ne postoji.

Kritične točke

Kritične točke („kandidati za točke lokalnih ekstrema“) funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) su elementi $c \in D$ takvi da je c stacionarna točka od f) ili $f'(c)$ ne postoji.

Primjer

Kritične točke funkcije $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ su $-3, 0$ i 3 .

Kritične točke

Kritične točke („kandidati za točke lokalnih ekstrema“) funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) su elementi $c \in D$ takvi da je c stacionarna točka od f) ili $f'(c)$ ne postoji.

Primjer

Kritične točke funkcije $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$ su $-3, 0$ i 3 .

Zadatak

Odredite kritične točke funkcije $f : \langle -2, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, zadane s:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 2x & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Postupak određivanja lokalnih ekstrema i točaka infleksije

- 1 Odredimo sve njezine kritične točke funkcije f (odnosno od f').

Postupak određivanja lokalnih ekstrema i točaka infleksije

- 1 Odredimo sve njezine kritične točke funkcije f (odnosno od f').
- 2 Za svaku kritičnu točku od f (odnosno od f') zasebno provjeravamo radi li se o točki lokalnog ekstrema (odnosno točki infleksije): Provjerimo dolazi li u toj točki do promjene rast/pad, tj. predznaka prve derivacije (odnosno dolazi li do promjene zakrivljenosti, tj. predznaka druge derivacije).

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme i točke infleksije funkcije zadane po dijelovima s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x^3 - x^2), & -2 < x < 1, \\ \log(3x + 2 - x^2), & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{x^2+1}, & x \geq 3 \end{cases}.$$

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Teorem

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f . Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f .

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Teorem

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f . Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f .

Zaključite kako za dvaput derivabilne funkcije možemo provjeriti je li dana stacionarna točka točka lokalnog ekstrema.

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Teorem

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f . Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f .

Zaključite kako za dvaput derivabilne funkcije možemo provjeriti je li dana stacionarna točka točka lokalnog ekstrema. Kako biste gornji teorem iskoristili za određivanje točaka infleksije?

Zadatak

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Teorem

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f . Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f .

Zaključite kako za dvaput derivabilne funkcije možemo provjeriti je li dana stacionarna točka točka lokalnog ekstrema. Kako biste gornji teorem iskoristili za određivanje točaka infleksije?

Zadatak

Odredite iznose konstanti a i b tako da $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b}}$ u -1 ima lokalni ekstrem, a u -2 točku infleksije.