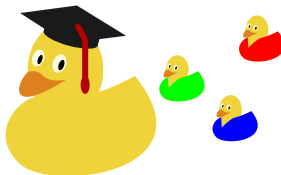
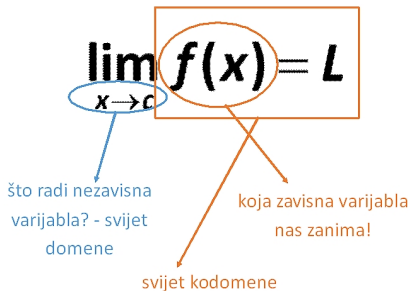


17. predavanje: Limesi funkcija u točki.

Franka Miriam Brückler



Uvod u limese



Što je x bliži c (u domeni), to je $f(x)$ bliži L (u kodomeni).
No, c tu ne mora biti broj i ne mora biti u domeni, a isto tako L ne mora biti broj i ne mora biti u kodomeni!

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ?

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ?

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ? Uz koji uvjet gornji limes ima smisla?

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ? Uz koji uvjet gornji limes ima smisla?

- Što znači

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10?$$

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ? Uz koji uvjet gornji limes ima smisla?

- Što znači

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10?$$

Mora li $f(5)$ biti 10?

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ? Uz koji uvjet gornji limes ima smisla?

- Što znači

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10?$$

Mora li $f(5)$ biti 10? Nacrtajte primjere grafova funkcija f za koje vrijedi gornji limes, jedan takav da je $f(5) = 10$, a drugi takav da je $f(5) \neq 10$.

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ? Uz koji uvjet gornji limes ima smisla?

- Što znači

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10?$$

Mora li $f(5)$ biti 10? Nacrtajte primjere grafova funkcija f za koje vrijedi gornji limes, jedan takav da je $f(5) = 10$, a drugi takav da je $f(5) \neq 10$.

- Može li za ikoju funkciju f limes te funkcije u 5 poprimiti dvije različite vrijednosti?

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ? Uz koji uvjet gornji limes ima smisla?

- Što znači

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10?$$

Mora li $f(5)$ biti 10? Nacrtajte primjere grafova funkcija f za koje vrijedi gornji limes, jedan takav da je $f(5) = 10$, a drugi takav da je $f(5) \neq 10$.

- Može li za ikoju funkciju f limes te funkcije u 5 poprimiti dvije različite vrijednosti? A ako je taj limes smislen, mora li postojati?

Limes funkcije u točki

- Ako je zadatak odrediti

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

mora li 5 biti u domeni funkcije f ? Ima li taj limes uvijek smisla ako je 5 u domeni od f ? Uz koji uvjet gornji limes ima smisla?

- Što znači

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10?$$

Mora li $f(5)$ biti 10? Nacrtajte primjere grafova funkcija f za koje vrijedi gornji limes, jedan takav da je $f(5) = 10$, a drugi takav da je $f(5) \neq 10$.

- Može li za ikoju funkciju f limes te funkcije u 5 poprimiti dvije različite vrijednosti? A ako je taj limes smislen, mora li postojati? Skicirajte graf funkcije f takav da je taj limes smislen, ali ne postoji.

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?
- Neka je $f(x) = \exp(x)$ i $c = 0$ te $x \neq 0$. Koje su koordinate točaka na grafu funkcije f određene s c i x ?

Prava definicija derivacije

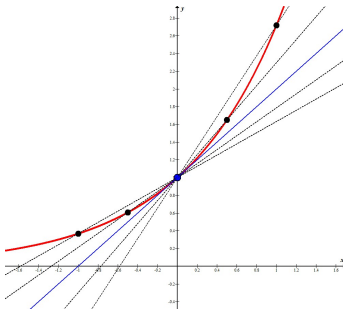
- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?
- Neka je $f(x) = \exp(x)$ i $c = 0$ te $x \neq 0$. Koje su koordinate točaka na grafu funkcije f određene s c i x ? Kako glasi jednadžba sekante koja prolazi kroz njih?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?
- Neka je $f(x) = \exp(x)$ i $c = 0$ te $x \neq 0$. Koje su koordinate točaka na grafu funkcije f određene s c i x ? Kako glasi jednadžba sekante koja prolazi kroz njih? Nacrtajte (na jednom grafu) takve sekante za četiri različita x .

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?
- Neka je $f(x) = \exp(x)$ i $c = 0$ te $x \neq 0$. Koje su koordinate točaka na grafu funkcije f određene s c i x ? Kako glasi jednadžba sekante koja prolazi kroz njih? Nacrtajte (na jednom grafu) takve sekante za četiri različita x .



- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.
- Ako je graf od f „iolo normalan“, što je

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.
- Ako je graf od f „iolo normalan“, što je x bliži c , to će $k(x)$ biti bliži koeficijentu smjera

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.
- Ako je graf od f „iolo normalan“, što je x bliži c , to će $k(x)$ biti bliži koeficijentu smjera tangente na graf f u točki c :

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.
- Ako je graf od f „iolo normalan“, što je x bliži c , to će $k(x)$ biti bliži koeficijentu smjera tangente na graf f u točki c :

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Jednostrani limesi

- Koja je razlika u značenju notacija

$$x \rightarrow c, \quad x \rightarrow c^+, \quad x \rightarrow c^-?$$

Jednostrani limesi

- Koja je razlika u značenju notacija

$$x \rightarrow c, \quad x \rightarrow c^+, \quad x \rightarrow c^-?$$

- Ako je $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$, koliko iznose

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)?$$

- Ako je

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2,$$

postoji li (i ako postoji, koliko iznosi)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)?$$

- Uašto funkcija apsolutne vrijednosti nije derivabilna u 0?

Zadatak

Funkcija f ima svojstva:

- *što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3;*
- *što je varijabla bliža 0 i pritom negativna, to je vrijednost funkcije bliža 0, a što je varijabla bliža 0 i pritom pozitivna, to je vrijednost funkcije bliža 1;*
- *što je varijabla bliža 2, to je vrijednost funkcije bliža 0, ali funkcija nije definirana u 2;*
- *što je varijabla bliža -2 , to je vrijednost funkcije bliža 1, funkcija je definirana u -2 i vrijednost funkcije u -2 je 0.*

Zapišite ta svojstva simbolički i nacrtajte graf jedne takve funkcije f .

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & -5 < x \leq -1 \\ x^2 - 1 & -1 < x \leq 1 \\ \log x & 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

Odredite limese te funkcije (sve jednostrane i obostrane koji imaju smisla) u točkama $c = -6, -5, \dots, 5, 6$.

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & -5 < x \leq -1 \\ x^2 - 1 & -1 < x \leq 1 \\ \log x & 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

Odredite limese te funkcije (sve jednostrane i obostrane koji imaju smisla) u točkama $c = -6, -5, \dots, 5, 6$.

Zadatak

Kako biste računski naslutili iznos $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$?

Zadatak

Ima li smisla govoriti o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$?

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & -5 < x \leq -1 \\ x^2 - 1 & -1 < x \leq 1 \\ \log x & 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

Odredite limese te funkcije (sve jednostrane i obostrane koji imaju smisla) u točkama $c = -6, -5, \dots, 5, 6$.

Zadatak

Kako biste računski naslutili iznos $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$?

Zadatak

Ima li smisla govoriti o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$? A ako je domena $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 5 \rangle$?

Beskonačni limesi u točki

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = x/|x|$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)

Beskonačni limesi u točki

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = x/|x|$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)
- Kad ćemo reći da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$?

Beskonačni limesi u točki

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = x/|x|$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)
- Kad ćemo reći da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$?
- Skicirajte po jedan primjer grafa funkcije za svako od prethodnih šest svojstava, za šest različitih c .

Beskonačni limesi u točki

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = x/|x|$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)
- Kad ćemo reći da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$?
- Skicirajte po jedan primjer grafa funkcije za svako od prethodnih šest svojstava, za šest različitih c .
- Definirajte vertikalne asimptote!

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0.

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0.
- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0.
- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0.
- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0.
- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?
- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0.
- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?
- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!
- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija u točki c ?

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0.
- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?
- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!
- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija u točki c ?
- Skicirajte graf funkcije sa svojstvima $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$,
 $f(-2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$, $f(-1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, 0 nije u
 domeni od f , $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ne postoji u užem smislu, $f(2) = 0$.