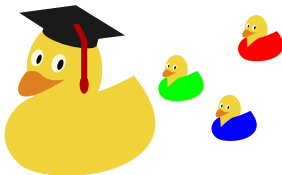


17. predavanje: Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable.

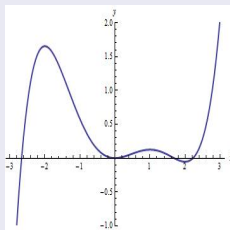
Franka Miriam Brückler



Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable

Zadatak

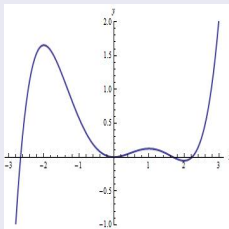
Pogledajte sljedeći graf neke funkcije. Koje točke domene biste zvali njenim točkama minimuma?



Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable

Zadatak

Pogledajte sljedeći graf neke funkcije. Koje točke domene biste zvali njenim točkama minimuma?



Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$. Što možete reći o njezinim točkama ekstrema?

- Točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f jedne varijable je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (odnosno minimum) funkcije f .

- Točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f jedne varijable je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (odnosno minimum) funkcije f .
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma?

- Točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f jedne varijable je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (odnosno minimum) funkcije f .
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?

- Točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f jedne varijable je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (odnosno minimum) funkcije f .
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?
- A može li funkcija imati više točaka globalnog maksimuma?

- Točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f jedne varijable je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (odnosno minimum) funkcije f .
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?
- A može li funkcija imati više točaka globalnog maksimuma?
- Ako imamo samo jednu točku lokalnog minimuma/maksimuma, ona je ujedno i točka globalnog minimuma/maksimuma — točno ili ne?

- Točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f jedne varijable je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (odnosno minimum) funkcije f .
- Može li funkcija imati više od jednog lokalnog maksimuma? A globalnog?
- A može li funkcija imati više točaka globalnog maksimuma?
- Ako imamo samo jednu točku lokalnog minimuma/maksimuma, ona je ujedno i točka globalnog minimuma/maksimuma — točno ili ne?
- Globalni minimum/maksimum je najmanji/najveći od svih lokalnih — točno ili ne?

Zadatak

Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti $r > 0$:

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^6.$$

Pokažite da je Lennard-Jonesov potencijal najmanji kad je $r = r_{\min}$ i da mu minimum iznosi $-\varepsilon$.

Zadatak

Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti $r > 0$:

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^6.$$

Pokažite da je Lennard-Jonesov potencijal najmanji kad je $r = r_{\min}$ i da mu minimum iznosi $-\varepsilon$.

Zadatak

U statističkoj termodinamici i kinetičkoj teoriji plinova se vjerojatnost da se čestica kreće brzinom iznosa $v \geq 0$ opisuje formulom Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti.

$$f_{\text{MB}}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m v^2}{2k T}\right).$$

U toj formuli je m masa razmatrane čestice, T je temperatura, a $k > 0$ je Boltzmannova konstanta.

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina neke molekule pri određenoj temperaturi.

U toj formuli je m masa razmatrane čestice, T je temperatura, a $k > 0$ je Boltzmannova konstanta.

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina neke molekule pri određenoj temperaturi. To nema smisla — vjerojatnost bilo koje konkretne brzine je 0.

U toj formuli je m masa razmatrane čestice, T je temperatura, a $k > 0$ je Boltzmannova konstanta.

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina neke molekule pri određenoj temperaturi. To nema smisla — vjerojatnost bilo koje konkretne brzine je 0.

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^ funkcije f_{MB} za molekulu poznate mase m pri temperaturi T .*

Iznos v^* je brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno (nasumce) odabrana molekula promatranog plina pri danoj temperaturi ima brzinu *blizu* v^* .

U toj formuli je m masa razmatrane čestice, T je temperatura, a $k > 0$ je Boltzmannova konstanta.

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina neke molekule pri određenoj temperaturi. To nema smisla — vjerojatnost bilo koje konkretne brzine je 0.

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^ funkcije f_{MB} za molekulu poznate mase m pri temperaturi T .*

Iznos v^* je brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno (nasumce) odabrana molekula promatranog plina pri danoj temperaturi ima brzinu *blizu* v^* .

Ako je funkcija f definirana na jednom intervalu I i ako je elementarna, te ako je $c \in I$ takva da funkcija raste svuda lijevo i pada svuda desno od c (ili obrnuto), onda je c točka globalnog ekstrema funkcije f .

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, primjerice elementarna, onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, primjerice elementarna, onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

Kako određujemo točke globalnih ekstrema za neprekidne funkcije zadane na segmentu?

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, primjerice elementarna, onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

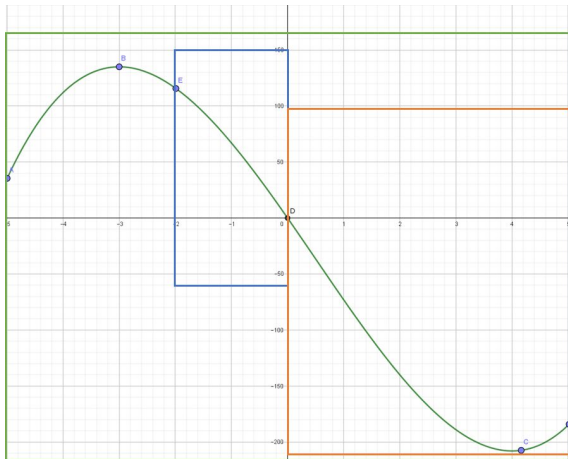
Kako određujemo točke globalnih ekstrema za neprekidne funkcije zadane na segmentu?

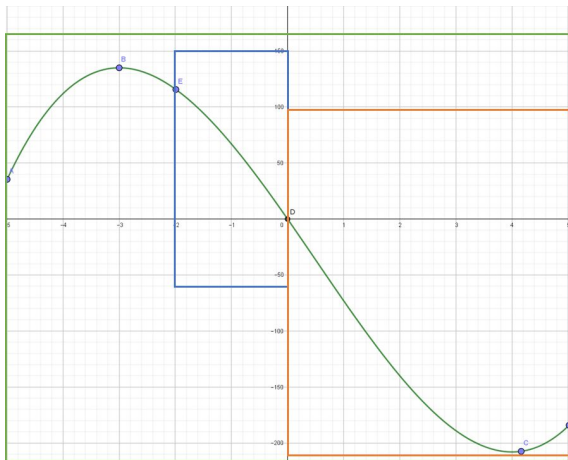
Zadatak

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom, ali s različitim domenama:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x,$$

$$D_1 = [-5, 5], D_2 = [0, 5], D_3 = [-2, 0], D_4 = \mathbb{R}$$





Zadatak

U polukrug je upisan jednakokračni trapez kojemu se dulja osnovica poklapa s promjerom. Odredite kutove u tom trapezu ako se radi o trapezu maksimalne površine.

Za **motivacijski primjer** vidjeli smo da je funkcija brzine dana s

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Pritom je traženo da se odredi maksimalna brzina rakete tijekom prvih 30 sekundi,

Za **motivacijski primjer** vidjeli smo da je funkcija brzine dana s

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Pritom je traženo da se odredi maksimalna brzina rakete tijekom prvih 30 sekundi, dakle globalni maksimum funkcije $v = v(t)$ na domeni $[0, 30 \text{ s}]$. Supstituiramo li $x = \frac{t}{\text{s}}$ i $y = \frac{v}{\text{m/s}}$ u gornu formulu dobit ćemo isti zadatak u preglednijem obliku:

Za **motivacijski primjer** vidjeli smo da je funkcija brzine dana s

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Pritom je traženo da se odredi maksimalna brzina rakete tijekom prvih 30 sekundi, dakle globalni maksimum funkcije $v = v(t)$ na domeni $[0, 30 \text{ s}]$. Supstituiramo li $x = \frac{t}{\text{s}}$ i $y = \frac{v}{\text{m/s}}$ u gornu formulu dobit ćemo isti zadatak u preglednijem obliku: Treba odrediti maksimum funkcije $y = -\frac{1}{10}x^3 + 3x^2 + 35$ na $[0, 30]$. Radi se o polinomu, dakle neprekidnoj funkciji pa je primjenjiv opisani postupak. Kritične točke su

Za **motivacijski primjer** vidjeli smo da je funkcija brzine dana s

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Pritom je traženo da se odredi maksimalna brzina rakete tijekom prvih 30 sekundi, dakle globalni maksimum funkcije $v = v(t)$ na domeni $[0, 30 \text{ s}]$. Supstituiramo li $x = \frac{t}{\text{s}}$ i $y = \frac{v}{\text{m/s}}$ u gornu formulu dobit ćemo isti zadatak u preglednijem obliku: Treba odrediti maksimum funkcije $y = -\frac{1}{10}x^3 + 3x^2 + 35$ na $[0, 30]$.

Radi se o polinomu, dakle neprekidnoj funkciji pa je primjenjiv opisani postupak. Kritične točke su 0 i 30 jer tu funkcija nije derivabilna, te stacionarne točke unutar intervala $\langle 0, 30 \rangle$:

$y' = -\frac{3}{10}x^2 + 6x$ je 0 za $x = 0$ (nije stacionarna točka jer tamo derivacija ne postoji) i $x = 20$.

Za **motivacijski primjer** vidjeli smo da je funkcija brzine dana s

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Pritom je traženo da se odredi maksimalna brzina rakete tijekom prvih 30 sekundi, dakle globalni maksimum funkcije $v = v(t)$ na domeni $[0, 30 \text{ s}]$. Supstituiramo li $x = \frac{t}{\text{s}}$ i $y = \frac{v}{\text{m/s}}$ u gornu formulu dobit ćemo isti zadatak u preglednijem obliku: Treba odrediti maksimum funkcije $y = -\frac{1}{10}x^3 + 3x^2 + 35$ na $[0, 30]$.

Radi se o polinomu, dakle neprekidnoj funkciji pa je primjenjiv opisani postupak. Kritične točke su 0 i 30 jer tu funkcija nije derivabilna, te stacionarne točke unutar intervala $\langle 0, 30 \rangle$:

$y' = -\frac{3}{10}x^2 + 6x$ je 0 za $x = 0$ (nije stacionarna točka jer tamo derivacija ne postoji) i $x = 20$. Dakle, imamo tri kritične točke: 0, 20 i 30. U njima y redom poprima vrijednosti 35, 435 i 35. Dakle, maksimalna brzina je postignuta u 20. sekundi i iznosi 435 m/s.