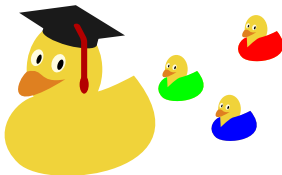


18. predavanje: Limesi funkcija u beskonačnosti. Svojstva limesa funkcija.

Franka Miriam Brückler



Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$?

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$?

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$?

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$? A $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$?

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$? A $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$?
- Definirajte horizontalne asimptote!

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$? A $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$?
- Definirajte horizontalne asimptote!
- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija u beskonačnosti?

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$? A $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$?
- Definirajte horizontalne asimptote!
- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija u beskonačnosti?
Ako postoje limesi racionalne funkcije u $-\infty$ i $+\infty$, mogu li oni biti različiti?

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$? A $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$?
- Definirajte horizontalne asimptote!
- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija u beskonačnosti?
Ako postoje limesi racionalne funkcije u $-\infty$ i $+\infty$, mogu li oni biti različiti? Objasnite smisao vodećeg člana polinoma.

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$? A $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$?
- Definirajte horizontalne asimptote!
- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija u beskonačnosti?
Ako postoje limesi racionalne funkcije u $-\infty$ i $+\infty$, mogu li oni biti različiti? Objasnite smisao vodećeg člana polinoma.
- Navedite primjer elementarne funkcije za koju postoje limesi u $-\infty$ i $+\infty$, ali su različiti.

Limes funkcije u beskonačnosti

- Ima li smisla

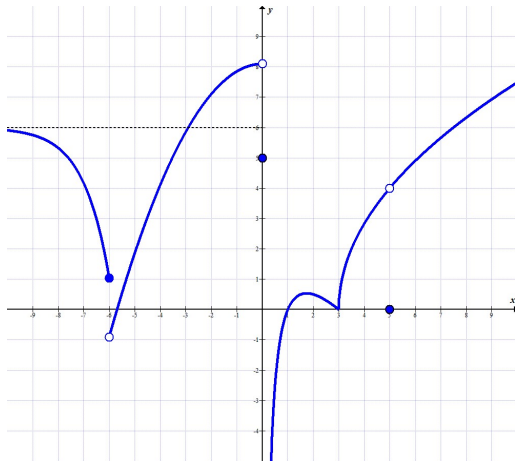
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ako je $f(x) = -\ln(-x)$? $f(x) = \exp(x)$? $f(x) = \sqrt{x-5}$?

- Što znači formula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$? A $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$?
- Definirajte horizontalne asimptote!
- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija u beskonačnosti?
Ako postoje limesi racionalne funkcije u $-\infty$ i $+\infty$, mogu li oni biti različiti? Objasnite smisao vodećeg člana polinoma.
- Navedite primjer elementarne funkcije za koju postoje limesi u $-\infty$ i $+\infty$, ali su različiti.
- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u $+\infty$ i u $-\infty$.

Zadatak

Za funkciju čiji graf je prikazana na slici odredite njene limese u $-\infty, -5, 0, 5, +\infty$.



Zadatak

Skicirajte graf realne funkcije f jedne varijable kojoj je domena $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ za koju vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1$$

Zadatak

Skicirajte graf realne funkcije f jedne varijable kojoj je domena $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ za koju vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1$$

$$\frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0); \quad \frac{a}{\infty} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

Zadatak

Skicirajte graf realne funkcije f jedne varijable kojoj je domena $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ za koju vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1$$

$$\frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0); \quad \frac{a}{\infty} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \ (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Zadatak

Grafički interpretirajte posljednja dva limesa!

Svojstva limesa



- Što znači svojstvo jedinstvenosti limesa?

Svojstva limesa



- Što znači svojstvo jedinstvenosti limesa?
- Je li računanje limesa u c (bio c realan broj ili neka od dviju beskonačnosti) linearno?

Svojstva limesa



- Što znači svojstvo jedinstvenosti limesa?
- Je li računanje limesa u c (bio c realan broj ili neka od dviju beskonačnosti) linearno?
- Kako se limesi „ponašaju“ s obzirom na množenje i dijeljenje?

Svojstva limesa



- Što znači svojstvo jedinstvenosti limesa?
- Je li računanje limesa u c (bio c realan broj ili neka od dviju beskonačnosti) linearno?
- Kako se limesi „ponašaju“ s obzirom na množenje i dijeljenje?
A kompoziciju?

Svojstva limesa



- Što znači svojstvo jedinstvenosti limesa?
- Je li računanje limesa u c (bio c realan broj ili neka od dviju beskonačnosti) linearno?
- Kako se limesi „ponašaju“ s obzirom na množenje i dijeljenje?
A kompoziciju?
- Dokažite homogenost deriviranja!

Svojstva limesa



- Što znači svojstvo jedinstvenosti limesa?
- Je li računanje limesa u c (bio c realan broj ili neka od dviju beskonačnosti) linearno?
- Kako se limesi „ponašaju“ s obzirom na množenje i dijeljenje?
A kompoziciju?
- Dokažite homogenost deriviranja!
- Što kaže teorem o sendviču?

Svojstva limesa

- Što znači svojstvo jedinstvenosti limesa?
- Je li računanje limesa u c (bio c realan broj ili neka od dviju beskonačnosti) linearno?
- Kako se limesi „ponašaju“ s obzirom na množenje i dijeljenje? A kompoziciju?
- Dokažite homogenost deriviranja!
- Što kaže teorem o sendviču? Dokažite da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Kose asimptote

Ako funkcija f ima kosu asimptotu $y = kx + l$ (desno), onda je

Kose asimptote

Ako funkcija f ima kosu asimptotu $y = kx + l$ (desno), onda je

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Objasnite zašto te formule vrijede!

Kose asimptote

Ako funkcija f ima kosu asimptotu $y = kx + l$ (desno), onda je

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Objasnite zašto te formule vrijede! Ako se gornjim formulama dobije $k = 2$, a limes za l ne postoji, ima li funkcija desnu kosu asimptotu?

Kose asimptote

Ako funkcija f ima kosu asimptotu $y = kx + l$ (desno), onda je

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Objasnite zašto te formule vrijede! Ako se gornjim formulama dobije $k = 2$, a limes za l ne postoji, ima li funkcija desnu kosu asimptotu? Što ako se dobije $k = 0$?

Kose asimptote

Ako funkcija f ima kosu asimptotu $y = kx + l$ (desno), onda je

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Objasnite zašto te formule vrijede! Ako se gornjim formulama dobije $k = 2$, a limes za l ne postoji, ima li funkcija desnu kosu asimptotu? Što ako se dobije $k = 0$?

Zadatak

Odredite sve asimptote funkcije zadane s $f(x) = x^2 \exp(-x) + x$.

Kose asimptote

Ako funkcija f ima kosu asimptotu $y = kx + l$ (desno), onda je

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Objasnite zašto te formule vrijede! Ako se gornjim formulama dobije $k = 2$, a limes za l ne postoji, ima li funkcija desnu kosu asimptotu? Što ako se dobije $k = 0$?

Zadatak

Odredite sve asimptote funkcije zadane s $f(x) = x^2 \exp(-x) + x$.

Zadatak

Dokažite da je za $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

L'Hôpitalovo pravilo

Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

L'Hôpitalovo pravilo

Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

L'Hôpitalovo pravilo

Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

L'Hôpitalovo pravilo

Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1/2)^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

L'Hôpitalovo pravilo

Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1/2)^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \cos x)$, što ne postoji, dakle ne postoji $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x}$.