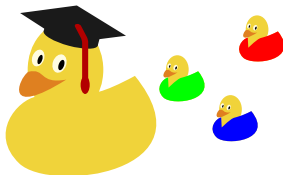
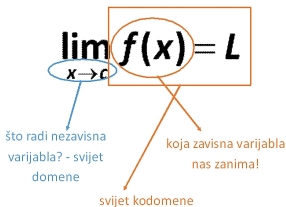


19. predavanje: Limesi, neprekidnost, derivabilnost.

Franka Miriam Brückler

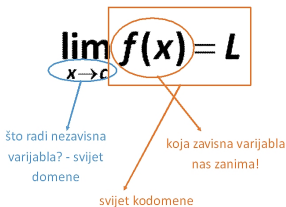


Limes funkcije u točki i u beskonačnosti



Kad $x \rightarrow c$ (x je u domeni od f), onda $f(x) \rightarrow L$ (u kodomeni).

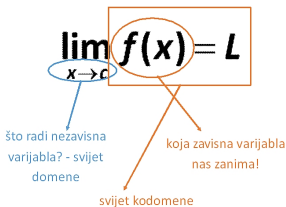
Limes funkcije u točki i u beskonačnosti



Kad $x \rightarrow c$ (x je u domeni od f), onda $f(x) \rightarrow L$ (u kodomeni).

- $c \in \mathbb{R}$ ne mora biti u domeni od f i $x \neq c$ dok $x \rightarrow c$, ali x dolazi proizvoljno blizu c (a ni $L \in \mathbb{R}$ ne mora biti u kodomeni od f); f mora biti definirana na nekom intervalu oko c , osim možda u c ;

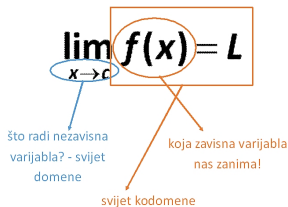
Limes funkcije u točki i u beskonačnosti



Kad $x \rightarrow c$ (x je u domeni od f), onda $f(x) \rightarrow L$ (u kodomeni).

- $c \in \mathbb{R}$ ne mora biti u domeni od f i $x \neq c$ dok $x \rightarrow c$, ali x dolazi proizvoljno blizu c (a ni $L \in \mathbb{R}$ ne mora biti u kodomeni od f); f mora biti definirana na nekom intervalu oko c , osim možda u c ;
- jednostrani limesi $x \rightarrow c+$ i $x \rightarrow c-$ gledaju samo situacije kad je $x > c$ odnosno $x < c$ pa za njih funkcija treba biti definirana samo na nekom intervalu $\langle c, b \rangle$ odnosno $\langle a, c \rangle$;

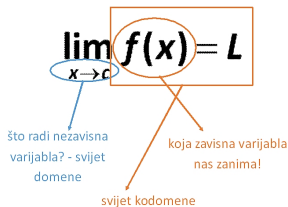
Limes funkcije u točki i u beskonačnosti



Kad $x \rightarrow c$ (x je u domeni od f), onda $f(x) \rightarrow L$ (u kodomeni).

- $c \in \mathbb{R}$ ne mora biti u domeni od f i $x \neq c$ dok $x \rightarrow c$, ali x dolazi proizvoljno blizu c (a ni $L \in \mathbb{R}$ ne mora biti u kodomeni od f); f mora biti definirana na nekom intervalu oko c , osim možda u c ;
- jednostrani limesi $x \rightarrow c+$ i $x \rightarrow c-$ gledaju samo situacije kad je $x > c$ odnosno $x < c$ pa za njih funkcija treba biti definirana samo na nekom intervalu $\langle c, b \rangle$ odnosno $\langle a, c \rangle$;
- kad je $c = \pm\infty$, podrazumijeva se noograničen rast ili pad od x ;

Limes funkcije u točki i u beskonačnosti



Kad $x \rightarrow c$ (x je u domeni od f), onda $f(x) \rightarrow L$ (u kodomeni).

- $c \in \mathbb{R}$ ne mora biti u domeni od f i $x \neq c$ dok $x \rightarrow c$, ali x dolazi proizvoljno blizu c (a ni $L \in \mathbb{R}$ ne mora biti u kodomeni od f); f mora biti definirana na nekom intervalu oko c , osim možda u c ;
- jednostrani limesi $x \rightarrow c+$ i $x \rightarrow c-$ gledaju samo situacije kad je $x > c$ odnosno $x < c$ pa za njih funkcija treba biti definirana samo na nekom intervalu $\langle c, b \rangle$ odnosno $\langle a, c \rangle$;
- kad je $c = \pm\infty$, podrazumijeva se noograničen rast ili pad od x ;
- limes postoji $\Leftrightarrow L \in \mathbb{R}$.

Zadatak

Definirajte horizontalne asimptote pomoću limesa.

Zadatak

Definirajte horizontalne asimptote pomoću limesa.

Zadatak

Ima li smisla govoriti o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$?

Zadatak

Definirajte horizontalne asimptote pomoću limesa.

Zadatak

Ima li smisla govoriti o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$? A ako je domena $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 5 \rangle$?

Zadatak

Definirajte horizontalne asimptote pomoću limesa.

Zadatak

Ima li smisla govoriti o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$? A ako je domena $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 5 \rangle$?

Zadatak

Skicirajte graf realne funkcije f jedne varijable kojoj je domena $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ za koju vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0; f(1) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1; f(-1) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ ne postoji};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1; f(-2) = 2.$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak

Koja je razlika između funkcija $f(x) = x$, $g(x) = x^2/x$ i $h(x) = x$ za $x \neq 0$, ali $h(0) = 1$.

Neprekidnost funkcije

Zadatak

Koja je razlika između funkcija $f(x) = x$, $g(x) = x^2/x$ i $h(x) = x$ za $x \neq 0$, ali $h(0) = 1$.

Definicija neprekidnosti

Funkcija f je neprekidna u točki c svoje domene ako vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Funkcija f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene. Element c domene od f zove se točkom prekida ako f nije neprekidna u c .

Neprekidnost funkcije

Zadatak

Koja je razlika između funkcija $f(x) = x$, $g(x) = x^2/x$ i $h(x) = x$ za $x \neq 0$, ali $h(0) = 1$.

Definicija neprekidnosti

Funkcija f je neprekidna u točki c svoje domene ako vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Funkcija f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene. Element c domene od f zove se točkom prekida ako f nije neprekidna u c .

Limes u definiciji je obostrani osim ako je c zatvoreni rub nekog od disjunktnih intervala koji u uniji daju domenu od f .

Sve elementarne funkcije su neprekidne!

Sve elementarne funkcije su neprekidne!

Zadatak

Ima li funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ prekid u 0?

Sve elementarne funkcije su neprekidne!

Zadatak

Ima li funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ prekid u 0?

Prekidi mogu biti uklonjivi ($f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, ali oboje su realni brojevi), skok ($\lim_{x \rightarrow c \pm} f(x)$ postoje, ali su različiti) ili bitni.

Sve elementarne funkcije su neprekidne!

Zadatak

Ima li funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ prekid u 0?

Prekidi mogu biti uklonjivi ($f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$), ali oboje su realni brojevi), skok ($\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ postoje, ali su različiti) ili bitni.

Zadatak

Skicirajte primjer grafa funkcije kojoj je domena $[-5, 5]$, koja je neprekidna u 0, u 1 ima uklonjivi prekid, u -1 ima skok, a u 2 ima bitni prekid.

Funkciju nazivamo **po dijelovima neprekidnom** ako ima (najviše9 konačno mnogo prekida od kojih nijedan nije bitan.

U kojim teoremima smo dosad umjesto neprekidnosti ili neprekidnosti po dijelovima koristili samo elementarne funkcije? Jesu li sve funkcije zadane po dijelovima ujedno po dijelovima neprekidne?

Beskonačni limesi

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)

Beskonačni limesi

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)
- Kad ćemo reći da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$?

Beskonačni limesi

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)
- Kad ćemo reći da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$?
- Skicirajte po jedan primjer grafa funkcije za svako od prethodnih šest svojstava, za šest različitih c .

Beskonačni limesi

- Usporedite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ za $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ i $f(x) = \cos(1/x)$ (posljednji graf nacrtajte pomoću <https://www.desmos.com/calculator>)
- Kad ćemo reći da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$?
 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$?
- Skicirajte po jedan primjer grafa funkcije za svako od prethodnih šest svojstava, za šest različitih c .
- Definirajte vertikalne asimptote pomoću limesa!

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0 i u $+\infty$.

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0 i u $+\infty$.
- Može li funkcija podsjedovati vertikalnu asimptotu u točki svoje domene?

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0 i u $+\infty$.
- Može li funkcija podsjedovati vertikalnu asimptotu u točki svoje domene? Može li tad biti neprekidna u toj točki?

- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0 i u $+\infty$.
- Može li funkcija podsjedovati vertikalnu asimptotu u točki svoje domene? Može li tad biti neprekidna u toj točki?
- Skicirajte graf funkcije sa svojstvima $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$, $f(-2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$, $f(-1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, 0 nije u domeni od f , $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ne postoji u užem smislu, $f(2) = 0$.

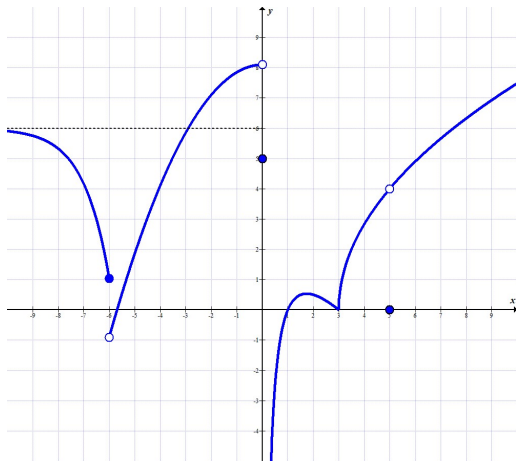
- Za sve elementarne funkcije čije grafove „znamo napamet“ odredite limese u 0 i u $+\infty$.
- Može li funkcija podsjedovati vertikalnu asimptotu u točki svoje domene? Može li tad biti neprekidna u toj točki?
- Skicirajte graf funkcije sa svojstvima $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$, $f(-2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$, $f(-1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, 0 nije u domeni od f , $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ne postoji u užem smislu, $f(2) = 0$.
- Ispitajte neprekidnost funkcije zadane s

$$g(x) = \begin{cases} \exp(x) + x, & x < 0 \\ \log(x + 1), & 0 \leq x \leq 9 \\ \ln \ln(x + 1), & 9 < x \leq 10 \end{cases}$$

Za sve točke prekida utvrdite njihov tip.

Zadatak

Za funkciju čiji graf je prikazana na slici odredite njene limese u $-\infty, -5, 0, 5, +\infty$. Što možete reći o njenoj neprekidnosti?



Svojstva i računanje limesa

Može li za ikoju funkciju limes te funkcije u $c \in \mathbb{R}$ poprimiti dvije različite vrijednosti?

Svojstva i računanje limesa

Može li za ikoju funkciju limes te funkcije u $c \in \mathbb{R}$ poprimiti dvije različite vrijednosti? A ako je taj limes smislen, mora li postojati?

Svojstva i računanje limesa

Može li za ikoju funkciju limes te funkcije u $c \in \mathbb{R}$ poprimiti dvije različite vrijednosti? A ako je taj limes smislen, mora li postojati? Skicirajte graf funkcije takav da je taj limes smislen, ali ne postoji.

Svojstva i računanje limesa

Može li za ikoju funkciju limes te funkcije u $c \in \mathbb{R}$ poprimiti dvije različite vrijednosti? A ako je taj limes smislen, mora li postojati? Skicirajte graf funkcije takav da je taj limes smislen, ali ne postoji.

Teorem

Ako $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ postoji on je jedinstven. Limes od $f(x)$ u c postoji ako i samo ako postoje i jednaka su oba jednostrana limesa od $f(x)$ u c .

Svojstva i računanje limesa

Može li za ikoju funkciju limes te funkcije u $c \in \mathbb{R}$ poprimiti dvije različite vrijednosti? A ako je taj limes smislen, mora li postojati? Skicirajte graf funkcije takav da je taj limes smislen, ali ne postoji.

Teorem

Ako $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ postoji on je jedinstven. Limes od $f(x)$ u c postoji ako i samo ako postoje i jednaka su oba jednostrana limesa od $f(x)$ u c .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Svojstva i računanje limesa

Može li za ikoju funkciju limes te funkcije u $c \in \mathbb{R}$ poprimiti dvije različite vrijednosti? A ako je taj limes smislen, mora li postojati? Skicirajte graf funkcije takav da je taj limes smislen, ali ne postoji.

Teorem

Ako $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ postoji on je jedinstven. Limes od $f(x)$ u c postoji ako i samo ako postoje i jednaka su oba jednostrana limesa od $f(x)$ u c .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Zadatak

Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dovoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?

- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?

- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?
- Limese kad $x \rightarrow c$ ($c+$, $c-$) različitih funkcija, ako postoje, možemo zbrajati, oduzimati, množiti i, ako nema dijeljenja s nulom, dijeliti. Što to znači za neprekidne funkcije?

- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?
- Limese kad $x \rightarrow c$ ($c+$, $c-$) različitih funkcija, ako postoje, možemo zbrajati, oduzimati, množiti i, ako nema dijeljenja s nulom, dijeliti. Što to znači za neprekidne funkcije?
- Objasnite razliku između sljedeća tri limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x}.$$

- Znači li pravilo

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{za} \quad a \neq 0$$

da je dozvoljeno dijeljenje s nulom?

- Što znači pravilo $\frac{a}{\infty} = 0$?
- Koliko iznosi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sin^2 x}$ ako je $c = \frac{\pi}{2}$? A ako je $c = 0$?
- Limese kad $x \rightarrow c$ ($c+$, $c-$) različitih funkcija, ako postoje, možemo zbrajati, oduzimati, množiti i, ako nema dijeljenja s nulom, dijeliti. Što to znači za neprekidne funkcije?
- Objasnite razliku između sljedeća tri limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x}.$$

- Kako se računaju limesi racionalnih funkcija?

Neodređeni izrazi u limesima

- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!

Neodređeni izrazi u limesima

- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

Neodređeni izrazi u limesima

- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

- L'Hôpitalovo pravilo:** Ako su oba limesa kad $x \rightarrow c$ od $f(x)$ i $g(x)$ jednaka 0 ili $\pm\infty$, ako g nije konstantna ni na kojem intervalu oko c te ako postoji limes kad $x \rightarrow c$ od $f'(x)/g'(x)$, onda je on jednak limesu kad $x \rightarrow c$ od $f(x)/g(x)$.

Neodređeni izrazi u limesima

- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

- L'Hôpitalovo pravilo:** Ako su oba limesa kad $x \rightarrow c$ od $f(x)$ i $g(x)$ jednaka 0 ili $\pm\infty$, ako g nije konstantna ni na kojem intervalu oko c te ako postoji limes kad $x \rightarrow c$ od $f'(x)/g'(x)$, onda je on jednak limesu kad $x \rightarrow c$ od $f(x)/g(x)$.
- Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2;$$

Neodređeni izrazi u limesima

- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

- L'Hôpitalovo pravilo:** Ako su oba limesa kad $x \rightarrow c$ od $f(x)$ i $g(x)$ jednaka 0 ili $\pm\infty$, ako g nije konstantna ni na kojem intervalu oko c te ako postoji limes kad $x \rightarrow c$ od $f'(x)/g'(x)$, onda je on jednak limesu kad $x \rightarrow c$ od $f(x)/g(x)$.
- Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

Neodređeni izrazi u limesima

- Na primjeru objasnite zašto limese tipa $\frac{0}{0}$ nazivamo neodređenima!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

- L'Hôpitalovo pravilo:** Ako su oba limesa kad $x \rightarrow c$ od $f(x)$ i $g(x)$ jednaka 0 ili $\pm\infty$, ako g nije konstantna ni na kojem intervalu oko c te ako postoji limes kad $x \rightarrow c$ od $f'(x)/g'(x)$, onda je on jednak limesu kad $x \rightarrow c$ od $f(x)/g(x)$.
- Komentirajte sljedeće račune limesa:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \cos x) \text{ ne postoji.}$$

Zadatak

Odredite sve asimptote funkcije zadane s $f(x) = x^2 \exp(-x) + x$.

Zadatak

Odredite sve asimptote funkcije zadane s $f(x) = x^2 \exp(-x) + x$.

Zadatak

Ovisnost veličine c o veličini t dana je formulom

$$c(t) = a b \frac{1 - \exp((b - a) k t)}{a - b \exp((b - a) k t)}.$$

Pritom su a , b i k pozitivne konstante i vrijedi $a \leq b$. Odredite ravnotežni iznos c_∞ veličine c , tj. limes od c kad $t \rightarrow +\infty$.

Zadatak

Odredite sve asimptote funkcije zadane s $f(x) = x^2 \exp(-x) + x$.

Zadatak

Ovisnost veličine c o veličini t dana je formulom

$$c(t) = a b \frac{1 - \exp((b - a) k t)}{a - b \exp((b - a) k t)}.$$

Pritom su a , b i k pozitivne konstante i vrijedi $a \leq b$. Odredite ravnotežni iznos c_∞ veličine c , tj. limes od c kad $t \rightarrow +\infty$.

Ako kompozicija $g \circ f$ ima smisla i ako je g neprekidna u $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ (gdje je $c \in \mathbb{R}$), onda je $\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(d)$.

Zadatak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}} = ?$$

Zadatak

Odredite sve asimptote funkcije zadane s $f(x) = x^2 \exp(-x) + x$.

Zadatak

Ovisnost veličine c o veličini t dana je formulom

$$c(t) = a b \frac{1 - \exp((b - a) k t)}{a - b \exp((b - a) k t)}.$$

Pritom su a , b i k pozitivne konstante i vrijedi $a \leq b$. Odredite ravnotežni iznos c_∞ veličine c , tj. limes od c kad $t \rightarrow +\infty$.

Ako kompozicija $g \circ f$ ima smisla i ako je g neprekidna u $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ (gdje je $c \in \mathbb{R}$), onda je $\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(d)$.

Zadatak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}} = ?$$

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?

Prava definicija derivacije

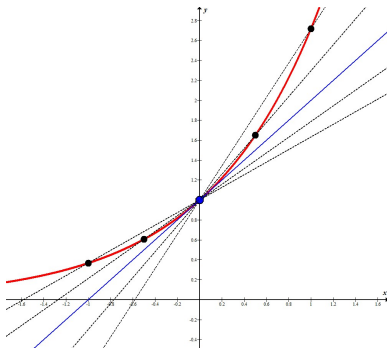
- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?
- Neka je $f(x) = \exp(x)$ i $c = 0$ te $x \neq 0$. Koje su koordinate točaka na grafu funkcije f određene s c i x ?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?
- Neka je $f(x) = \exp(x)$ i $c = 0$ te $x \neq 0$. Koje su koordinate točaka na grafu funkcije f određene s c i x ? Kako glasi jednadžba sekante koja prolazi kroz njih?

Prava definicija derivacije

- Kako smo prije nekoliko tjedana „definirali“ derivaciju? Što je to tangenta na krivulju? A što je to sekanta krivulje?
- Neka je $f(x) = \exp(x)$ i $c = 0$ te $x \neq 0$. Koje su koordinate točaka na grafu funkcije f određene s c i x ? Kako glasi jednadžba sekante koja prolazi kroz njih?



- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.
- Ako je graf od f „lokalno normalan“, što je x bliži c , to će $k(x)$ biti bliži koeficijentu smjera

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.
- Ako je graf od f „iolo normalan“, što je x bliži c , to će $k(x)$ biti bliži koeficijentu smjera tangente na graf f u točki c :

- Ako je zadana funkcije $y = f(x)$ i c iz njezine domene, zapišite formulu funkcije $y = k(x)$, gdje je k koeficijent smjera sekanata kroz točke grafa funkcije f s apscisama c i x :

$$k(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Koja je domena funkcije k ?

- Skicirajte graf funkcije k i odredite joj limes kad x teži u 0 ako je $f(x) = x^2$.
- Ako je graf od f „lokalno normalan“, što je x bliži c , to će $k(x)$ biti bliži koeficijentu smjera tangente na graf f u točki c :

$$f'(c) := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Zadatak

Dokažite da funkcija apsolutne vrijednosti nije derivabilna u nuli. Objasnite sva četiri slučaja nepostojanja derivacije.

Zadatak

Dokažite da funkcija apsolutne vrijednosti nije derivabilna u nuli. Objasnite sva četiri slučaja nepostojanja derivacije.

Ako je funkcija derivabilna u c , onda je i neprekidna u c . Obrat ne mora vrijediti.

Zadatak

Dokažite da funkcija apsolutne vrijednosti nije derivabilna u nuli. Objasnite sva četiri slučaja nepostojanja derivacije.

Ako je funkcija derivabilna u c , onda je i neprekidna u c . Obrat ne mora vrijediti. Jesu li sve elementarne funkcije derivabilne na svojim domenama?

Zadatak

Dokažite da funkcija apsolutne vrijednosti nije derivabilna u nuli. Objasnite sva četiri slučaja nepostojanja derivacije.

Ako je funkcija derivabilna u c , onda je i neprekidna u c . Obrat ne mora vrijediti. Jesu li sve elementarne funkcije derivabilne na svojim domenama?

Zadatak

Dokažite svojstvo homogenosti deriviranja.

Zadatak

Dokažite da funkcija apsolutne vrijednosti nije derivabilna u nuli. Objasnite sva četiri slučaja nepostojanja derivacije.

Ako je funkcija derivabilna u c , onda je i neprekidna u c . Obrat ne mora vrijediti. Jesu li sve elementarne funkcije derivabilne na svojim domenama?

Zadatak

Dokažite svojstvo homogenosti deriviranja.

Zadatak

Odredite limese te funkcije i ispitajte derivabilnost u točkama $c = -6, -5, \dots, 5, 6$ za

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & -5 < x \leq -1 \\ x^2 - 1 & -1 < x \leq 1 \\ \log x & 1 < x \leq 5 \end{cases}.$$