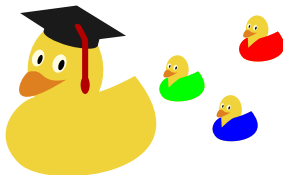


19. predavanje: Asimptote. Tok funkcije.

Franka Miriam Brückler



Tok funkcije

Dosad znamo odrediti prirodnu domenu, sjecišta grafa s koordinatnim osima,

Tok funkcije

Dosad znamo odrediti prirodnu domenu, sjecišta grafa s koordinatnim osima, ispitati rast i pad i lokalne ekstreme,

Tok funkcije

Dosad znamo odrediti prirodnu domenu, sjecišta grafa s koordinatnim osima, ispitati rast i pad i lokalne ekstreme, te utvrditi kakva je zakrivljenost grafa dane realne funkcije jedne varijable.

Zadatak

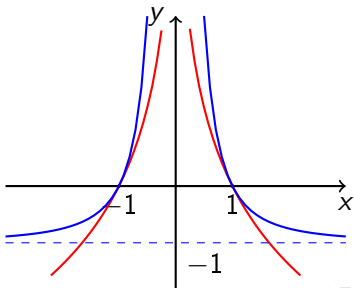
Ispitajte sve navedeno za $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ i $g(x) = -\ln(x^2)$. Koji bi Vam zaključak bio o grafu od f u usporedbi s grafom od g ?

Tok funkcije 🎓

Dosad znamo odrediti prirodnu domenu, sjecišta grafa s koordinatnim osima, ispitati rast i pad i lokalne ekstreme, te utvrditi kakva je zakrivljenost grafa dane realne funkcije jedne varijable.

Zadatak

Ispitajte sve navedeno za $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ i $g(x) = -\ln(x^2)$. Koji bi Vam zaključak bio o grafu od f u usporedbi s grafom od g ?



Asimptote

Kako smo opisali vertikalne i horizontalne asimptote grafova funkcija?

Asimptote

Kako smo opisali vertikalne i horizontalne asimptote grafova funkcija? Koliko najviše horizontalnih odnosno vertikalnih asimptota može imati graf realne funkcije jedne varijable?

Asimptote

Kako smo opisali vertikalne i horizontalne asimptote grafova funkcija? Koliko najviše horizontalnih odnosno vertikalnih asimptota može imati graf realne funkcije jedne varijable? Grafovi realnih funkcija jedne varijable mogu imati:

- Vertikalne asimptote.
- Horizontalne asimptote.

Asimptote

Kako smo opisali vertikalne i horizontalne asimptote grafova funkcija? Koliko najviše horizontalnih odnosno vertikalnih asimptota može imati graf realne funkcije jedne varijable? Grafovi realnih funkcija jedne varijable mogu imati:

- Vertikalne asimptote.
- Horizontalne asimptote.
- Kose asimptote: Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je pravac $y = kx + \ell$ (s $k \neq 0$) njezina **kosa asimptota** ako što je x veći (ili manji), to je $f(x) - kx$ bliži iznosu ℓ , tj. ako je $y = \ell$ horizontalna asimptota funkcije $g(x) = f(x) - kx$.

Zadatak

U kom slučaju će graf racionalne funkcije imati kosu asimptotu? Može li imati dvije različite kose asimptote ili s jedne strane kosu, a s druge horizontalnu?

„što je varijabla * bliža iznosu ♡“

„što je varijabla * bliža iznosu ♥“ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit . : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

„što je varijabla $*$ bliža iznosu $\heartsuit$ “ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit . : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow +\infty$

„što je varijabla $*$ bliža iznosu $\heartsuit$ “ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit . : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno velika,

$* \rightarrow -\infty$

„što je varijabla $*$ bliža iznosu $\heartsuit$ “ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit . : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno velika,

$* \rightarrow -\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno mala.

„što je varijabla $*$ bliža iznosu $\heartsuit$ “ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit . : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno velika,

$* \rightarrow -\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno mala.

- $y = L$ je HA za $y = f(x)$ ako $f(x) \rightarrow L$ kad $x \rightarrow +\infty$ i(li) kad $x \rightarrow -\infty$;

„što je varijabla $*$ bliža iznosu $\heartsuit$ “ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit . : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno velika,

$* \rightarrow -\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno mala.

- $y = L$ je HA za $y = f(x)$ ako $f(x) \rightarrow L$ kad $x \rightarrow +\infty$ i(li) kad $x \rightarrow -\infty$;
- $x = c$ je VA za $y = f(x)$ ako $f(x) \rightarrow +\infty$ ili $f(x) \rightarrow -\infty$ kad $x \rightarrow c$, $x \rightarrow c-$ i(li) $x \rightarrow c+$;

„što je varijabla $*$ bliža iznosu $\heartsuit$ “ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit. : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno velika,

$* \rightarrow -\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno mala.

- $y = L$ je HA za $y = f(x)$ ako $f(x) \rightarrow L$ kad $x \rightarrow +\infty$ i(li) kad $x \rightarrow -\infty$;
- $x = c$ je VA za $y = f(x)$ ako $f(x) \rightarrow +\infty$ ili $f(x) \rightarrow -\infty$ kad $x \rightarrow c$, $x \rightarrow c-$ i(li) $x \rightarrow c+$;
- $y = kx + \ell$ je KA za $y = f(x)$ ako $k \neq 0$ i $f(x) - kx \rightarrow \ell$ kad $x \rightarrow +\infty$ i(li) kad $x \rightarrow -\infty$.

„što je varijabla $*$ bliža iznosu $\heartsuit$ “ $\Leftrightarrow$: $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit + : \Leftrightarrow * > \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow \heartsuit . : \Leftrightarrow * < \heartsuit$ i $* \rightarrow \heartsuit$

$* \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno velika,

$* \rightarrow -\infty : \Leftrightarrow$ „kad varijabla $*$ postaje neograničeno mala.

- $y = L$ je HA za $y = f(x)$ ako $f(x) \rightarrow L$ kad $x \rightarrow +\infty$ i(li) kad $x \rightarrow -\infty$;
- $x = c$ je VA za $y = f(x)$ ako $f(x) \rightarrow +\infty$ ili $f(x) \rightarrow -\infty$ kad $x \rightarrow c$, $x \rightarrow c-$ i(li) $x \rightarrow c+$;
- $y = kx + \ell$ je KA za $y = f(x)$ ako $k \neq 0$ i $f(x) - kx \rightarrow \ell$ kad $x \rightarrow +\infty$ i(li) kad $x \rightarrow -\infty$.

Stoga za provjeru postojanja asimptota trebamo znati provjeriti kako se $f(x)$ ponaša kad $x \rightarrow c \in \mathbb{R}$ i kad $x \rightarrow \pm\infty$.

Limesi funkcija u beskonačnosti

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Limesi funkcija u beskonačnosti

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Takav limes postoji, tj. jednak je nekom realnom broju L ako kad $x \rightarrow +\infty$ (odnosno $x \rightarrow -\infty$) vrijedi da $f(x) \rightarrow L$. Tada pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Limesi funkcija u beskonačnosti

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Takav limes postoji, tj. jednak je nekom realnom broju L ako kad $x \rightarrow +\infty$ (odnosno $x \rightarrow -\infty$) vrijedi da $f(x) \rightarrow L$. Tada pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Zadatak

Ima li smisla računati $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(-+x)$? $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x - 10000000000}$?

Limesi funkcija u beskonačnosti

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Takav limes postoji, tj. jednak je nekom realnom broju L ako kad $x \rightarrow +\infty$ (odnosno $x \rightarrow -\infty$) vrijedi da $f(x) \rightarrow L$. Tada pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Zadatak

Ima li smisla računati $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(-+x)$? $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x - 10000000000}$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} =$$

Limesi funkcija u beskonačnosti

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Takav limes postoji, tj. jednak je nekom realnom broju L ako kad $x \rightarrow +\infty$ (odnosno $x \rightarrow -\infty$) vrijedi da $f(x) \rightarrow L$. Tada pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Zadatak

Ima li smisla računati $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(-+x)$? $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x - 10000000000}$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$y = L$ je HA za $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ili $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Zadatak

Ispitajte postojanje horizontalnih asimptota za funkcije f i g s početka ove prezentacije.

Zadatak

Ispitajte postojanje horizontalnih asimptota za funkcije f i g s početka ove prezentacije.

Zadatak

Ima li funkcija $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ horizontalnu(e) asimptotu(e)?

Zadatak

Ispitajte postojanje horizontalnih asimptota za funkcije f i g s početka ove prezentacije.

Zadatak

Ima li funkcija $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ horizontalnu(e) asimptotu(e)?

Može li na lijevoj ili desnoj strani postojati kosa asimptota ako već znamo da na toj strani postoji horizontalna asimptota?

Zadatak

Ispitajte postojanje horizontalnih asimptota za funkcije f i g s početka ove prezentacije.

Zadatak

Ima li funkcija $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ horizontalnu(e) asimptotu(e)?

Može li na lijevoj ili desnoj strani postojati kosa asimptota ako već znamo da na toj strani postoji horizontalna asimptota? Ako lijevo ili desno nema horizontalne asimptote, potrebno je ispitati postojanje kose asimptote:

Za $x \rightarrow +\infty$ (ili $x \rightarrow -\infty$) vrijedi $f(x) - kx \rightarrow \ell$

Zadatak

Ispitajte postojanje horizontalnih asimptota za funkcije f i g s početka ove prezentacije.

Zadatak

Ima li funkcija $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ horizontalnu(e) asimptotu(e)?

Može li na lijevoj ili desnoj strani postojati kosa asimptota ako već znamo da na toj strani postoji horizontalna asimptota? Ako lijevo ili desno nema horizontalne asimptote, potrebno je ispitati postojanje kose asimptote:

Za $x \rightarrow +\infty$ (ili $x \rightarrow -\infty$) vrijedi $f(x) - kx \rightarrow \ell \Leftrightarrow$
 $\frac{f(x)}{x} - k - \frac{\ell}{x} \rightarrow 0.$

Zadatak

Ispitajte postojanje horizontalnih asimptota za funkcije f i g s početka ove prezentacije.

Zadatak

Ima li funkcija $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ horizontalnu(e) asimptotu(e)?

Može li na lijevoj ili desnoj strani postojati kosa asimptota ako već znamo da na toj strani postoji horizontalna asimptota? Ako lijevo ili desno nema horizontalne asimptote, potrebno je ispitati postojanje kose asimptote:

Za $x \rightarrow +\infty$ (ili $x \rightarrow -\infty$) vrijedi $f(x) - kx \rightarrow \ell \Leftrightarrow$
 $\frac{f(x)}{x} - k - \frac{\ell}{x} \rightarrow 0.$

$y = kx + \ell$ je desna KA za $y = f(x) \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0, k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = \ell \in \mathbb{R}$$

Zadatak

Temeljem poznavanja grafova elementarnih funkcija zaključite za koje od sljedećih funkcija koji od limesa u beskonačnosti postoje i koliko iznose: konstante funkcije, eksponencijalne funkcije, monomi s cjelobrojnim koeficijentima.

Zadatak

Temeljem poznavanja grafova elementarnih funkcija zaključite za koje od sljedećih funkcija koji od limesa u beskonačnosti postoje i koliko iznose: konstante funkcije, eksponencijalne funkcije, monomi s cjelobrojnim koeficijentima.

$$e := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Zadatak

Temeljem poznavanja grafova elementarnih funkcija zaključite za koje od sljedećih funkcija koji od limesa u beskonačnosti postoje i koliko iznose: konstante funkcije, eksponencijalne funkcije, monomi s cjelobrojnim koeficijentima.

$$e := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Zadatak

Ispitajte postojanje horizontalnih ili vertikalnih asimptota za funkciju

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

Limes funkcije u točki

$$x \rightarrow c \quad x \rightarrow c + \quad x \rightarrow c - \quad (c \in \mathbb{R})$$

Limes funkcije u točki

$x \rightarrow c$ $x \rightarrow c +$ $x \rightarrow c -$ ($c \in \mathbb{R}$) Iz perspektive asimptota, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ je potreban za ispitivanje je li $x = c$ VA:

- Funkcija f je zadana po dijelovima i u c joj se mijenja pravilo,
- c je otvoreni rub nekog od disjunktnih intervala koji u uniji daju domenu od f .

Limes funkcije u točki

$x \rightarrow c$ $x \rightarrow c +$ $x \rightarrow c -$ ($c \in \mathbb{R}$) Iz perspektive asimptota, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ je potreban za ispitivanje je li $x = c$ VA:

- Funkcija f je zadana po dijelovima i u c joj se mijenja pravilo,
- c je otvoreni rub nekog od disjunktnih intervala koji u uniji daju domenu od f .

Zadatak

Osmislite primjer funkcije koja u jednoj točki svoje domene ima vertikalnu asimptotu.

Zadatak

Koje su vertikalne asimptote funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & -5 < x \leq -1 \\ \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Zadatak

Koje su vertikalne asimptote funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & -5 < x \leq -1 \\ \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Tok funkcije

- 1 Domena. Sjecišta s koordinatnim osima.
Pozitivnost/negativnost.

Zadatak

Koje su vertikalne asimptote funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & -5 < x \leq -1 \\ \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Tok funkcije

- 1 Domena. Sjecišta s koordinatnim osima.
Pozitivnost/negativnost.
- 2 Rast, pad, lokalni ekstremi.

Zadatak

Koje su vertikalne asimptote funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & -5 < x \leq -1 \\ \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Tok funkcije

- 1 Domena. Sjecišta s koordinatnim osima.
Pozitivnost/negativnost.
- 2 Rast, pad, lokalni ekstremi.
- 3 Konveksnos, konkavnost, točke infleksije.

Zadatak

Koje su vertikalne asimptote funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & -5 < x \leq -1 \\ \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Tok funkcije

- 1 Domena. Sjecišta s koordinatnim osima.
Pozitivnost/negativnost.
- 2 Rast, pad, lokalni ekstremi.
- 3 Konveksnos, konkavnost, točke infleksije.
- 4 Asimptote.

Zadatak

Ispitajte tok Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti

$$f_{MB}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \quad v \geq 0.$$