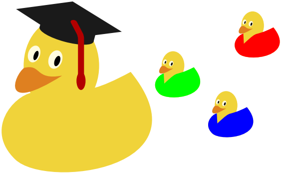
20. predavanje: Neodređeni i određeni integrali.

Franka Miriam Brückler



Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena? Dokažite da ako $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo!

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena? Dokažite da ako $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo! Ako je f antiderivacija od F, može li postojati antiderivacija g od F koja nije oblika f_C?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena? Dokažite da ako $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo! Ako je f antiderivacija od F, može li postojati antiderivacija g od F koja nije oblika f_C?
- Jesu li sve antiderivacije od $F(x) = \frac{1}{x}$ oblika $\ln x + C$?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena? Dokažite da ako $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo! Ako je f antiderivacija od F, može li postojati antiderivacija g od F koja nije oblika f_C?
- Jesu li sve antiderivacije od $F(x) = \frac{1}{x}$ oblika $\ln x + C$?
- Kako definiramo i kako označavamo neodređeni integral realne funkcije jedne varijable? Što je to podintegralna funkcija, a što konstanta integracije?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena? Dokažite da ako $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo! Ako je f antiderivacija od F, može li postojati antiderivacija g od F koja nije oblika f_C?
- Jesu li sve antiderivacije od $F(x) = \frac{1}{x}$ oblika $\ln x + C$?
- Kako definiramo i kako označavamo neodređeni integral realne funkcije jedne varijable? Što je to podintegralna funkcija, a što konstanta integracije?
- Koja je fizikalna interpretacija neodređenog integrala?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena? Dokažite da ako $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo! Ako je f antiderivacija od F, može li postojati antiderivacija g od F koja nije oblika f_C?
- Jesu li sve antiderivacije od $F(x) = \frac{1}{x}$ oblika $\ln x + C$?
- Kako definiramo i kako označavamo neodređeni integral realne funkcije jedne varijable? Što je to podintegralna funkcija, a što konstanta integracije?
- Koja je fizikalna interpretacija neodređenog integrala?
- Je li $\int f'(x)dx = f(x)$?

Neodređeni integral

- Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = \cos x$?
- Definirajte antiderivaciju funkcije. Koji joj je alternativni naziv?
- Može li antiderivacija funkcije biti jedinstvena? Dokažite da ako $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo! Ako je f antiderivacija od F, može li postojati antiderivacija g od F koja nije oblika f_C?
- Jesu li sve antiderivacije od $F(x) = \frac{1}{x}$ oblika $\ln x + C$?
- Kako definiramo i kako označavamo neodređeni integral realne funkcije jedne varijable? Što je to podintegralna funkcija, a što konstanta integracije?
- Koja je fizikalna interpretacija neodređenog integrala?
- Je li $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$? A $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$?

Tablično integriranje

- Ispišite osnovnu tablicu integrala.

Tablično integriranje

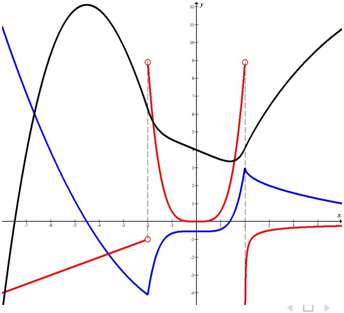
- Ispišite osnovnu tablicu integrala.
- Neodređeni integral je linearan — što to znači i zašto to vrijedi?

Tablično integriranje

- Ispišite osnovnu tablicu integrala.
- Neodređeni integral je linearan — što to znači i zašto to vrijedi?
- $\int \cos^2 \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = ?$

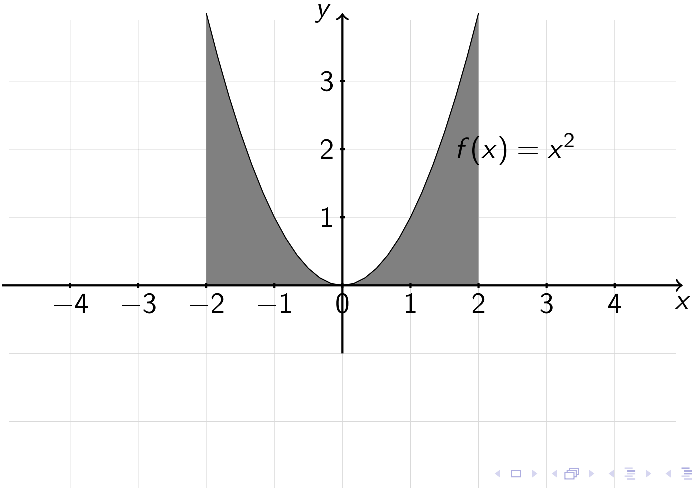
Tablično integriranje

- Ispišite osnovnu tablicu integrala.
- Neodređeni integral je linearan — što to znači i zašto to vrijedi?
- $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, \mathrm{d}x = ?$
- Na slici dolje prikazani su grafovi jedne funkcije F, njezine derivacije F' i jedne njezine antiderivacije f. Koji je koji?



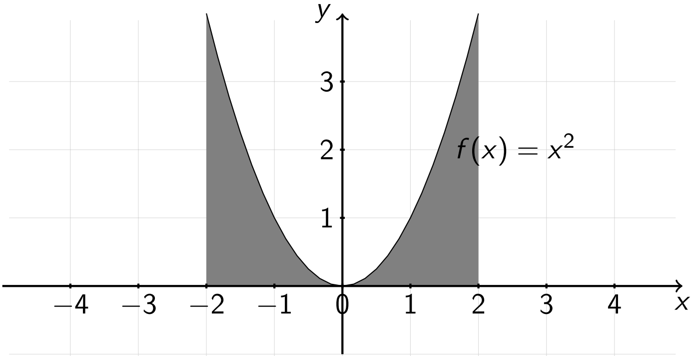
Problem površine

Kolika je površina omeđena krivuljom $y = x^2$ i pravcima $y = 0$, $x = -2$ i $x = 2$?



Problem površine

Kolika je površina omeđena krivuljom $y = x^2$ i pravcima $y = 0$, $x = -2$ i $x = 2$?



$$\int_{-2}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{16}{3}$$

Određeni integral

- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Određeni integral

- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako se takav integral označava?

Određeni integral

- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako se takav integral označava? Što ako je F neprekidna, ali nije nenegativna?

Određeni integral

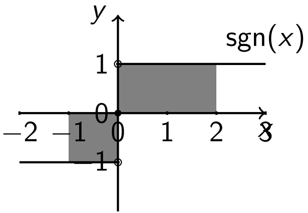
- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako se takav integral označava? Što ako je F neprekidna, ali nije nenegativna?
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} (2x - 1)\, \mathrm{d}x = ?$

Određeni integral

- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako se takav integral označava? Što ako je F neprekidna, ali nije nenegativna?
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} (2x - 1)\,\mathrm{d}x =?$ Funkcija signum, oznaka sgn, je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0.

Određeni integral

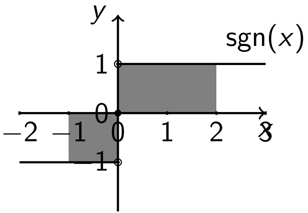
- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako se takav integral označava? Što ako je F neprekidna, ali nije nenegativna?
- $\int_{-2}^{3} (2x - 1)\,\mathrm{d}x = ?$ Funkcija signum, oznaka sgn, je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0.



$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x \; \mathrm{d}x = 1$$

Određeni integral

- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako se takav integral označava? Što ako je F neprekidna, ali nije nenegativna?
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} (2x - 1)\,\mathrm{d}x =$? Funkcija signum, oznaka sgn, je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0.

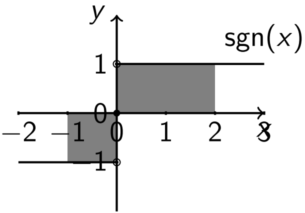


$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x = 1$$

- Kako biste proširili gornju definiciju na funkcije s konačno mnogo prekida?

Određeni integral

- Definirajte određeni integral *neprekidne nenegativne* funkcije $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Kako se takav integral označava? Što ako je F neprekidna, ali nije nenegativna?
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} (2x - 1)\,\mathrm{d}x =?$ Funkcija signum, oznaka sgn, je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0.



$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x \; \mathrm{d}x = 1$$

- Kako biste proširili gornju definiciju na funkcije s konačno mnogo prekida? Koja je mana takve definicije?

Osnovna svojstva određenog integrala

Zadatak

Izračunajte $\int_{-2}^{3} F(x)\,\mathrm{d}x$ *i* $\int_{3}^{-2} F(x)\,\mathrm{d}x$ *ako je*

$$F(x) = \begin{cases} 3-2x & x<0, \\ x+1, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Osnovna svojstva određenog integrala

Zadatak

Izračunajte $\int_{-2}^{3} F(x)\,\mathrm{d}x$ *i* $\int_{3}^{-2} F(x)\,\mathrm{d}x$ *ako je*

$$F(x) = \begin{cases} 3-2x & x<0, \\ x+1, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

$$\int_{a_0}^{a_0} \sqrt{\frac{Z^3}{32\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) \exp\left(-\frac{Z}{2a_0} r\right) \,\mathrm{d}x = ?$$

Osnovna svojstva određenog integrala

Zadatak

Izračunajte $\displaystyle\int_{-2}^{3} F(x)\,\mathrm{d}x$ *i* $\displaystyle\int_{3}^{-2} F(x)\,\mathrm{d}x$ *ako je*

$$F(x) = \begin{cases} 3-2x & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

$$\int_{a_0}^{a_0} \sqrt{\frac{Z^3}{32\pi a_0^3}} \left(2-\frac{Z}{a_0}r\right) \exp\left(-\frac{Z}{2a_0}r\right)\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{tg}(x^3)\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Osnovna svojstva određenog integrala

Zadatak

Izračunajte $\displaystyle\int_{-2}^{3} F(x)\,\mathrm{d}x$ *i* $\displaystyle\int_{3}^{-2} F(x)\,\mathrm{d}x$ *ako je*

$$F(x) = \begin{cases} 3-2x & x<0, \\ x+1, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

$$\int_{a_0}^{a_0} \sqrt{\frac{Z^3}{32\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{Z}{a_0} r\right) \exp\left(-\frac{Z}{2a_0} r\right) \mathrm{d}x = ?$$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{tg}(x^3)\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-10}^{10} |x|\,\mathrm{d}x = ?$$

Prava definicija određenog (Riemannovog) integrala

Želimo određeni integral I definirati za što širu klasu *ograničenih* funkcija na segmentu.

Prava definicija određenog (Riemannovog) integrala

Želimo određeni integral I definirati za što širu klasu *ograničenih* funkcija na segmentu.

Ideja rješenja problema površine zakrivljenog lika potječe još od Arhimeda.

Prava definicija određenog (Riemannovog) integrala

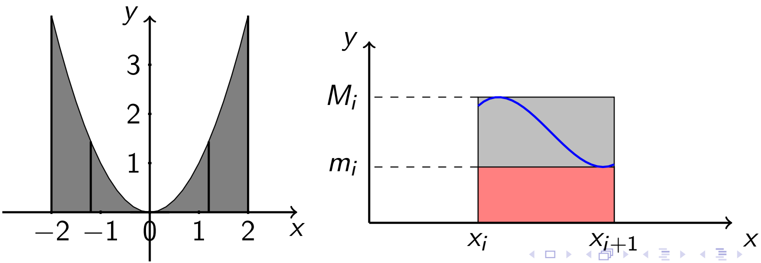
Želimo određeni integral I definirati za što širu klasu *ograničenih* funkcija na segmentu.
Ideja rješenja problema površine zakrivljenog lika potječe još od Arhimeda. U definiciji određenog integrala površinu rastavljamo na

Prava definicija određenog (Riemannovog) integrala

Želimo određeni integral I definirati za što širu klasu *ograničenih* funkcija na segmentu.
Ideja rješenja problema površine zakrivljenog lika potječe još od Arhimeda. U definiciji određenog integrala površinu rastavljamo na pravokutnike kojima je jedna stranica na x-osi (podinterval područja integriranja $[a, b]$) i dvije su okomite na nju, a čevrta stranica

Prava definicija određenog (Riemannovog) integrala

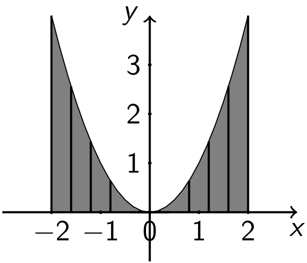
Želimo određeni integral I definirati za što širu klasu *ograničenih* funkcija na segmentu.
Ideja rješenja problema površine zakrivljenog lika potječe još od Arhimeda. U definiciji određenog integrala površinu rastavljamo na pravokutnike kojima je jedna stranica na x-osi (podinterval područja integriranja $[a, b]$) i dvije su okomite na nju, a čevrta stranica prolazi kroz ,,najnižu" odnosno ,,najvišu" točku grafa (,,donje" i ,,gornje" pravokutnike):



Prava definicija određenog (Riemannovog) integrala

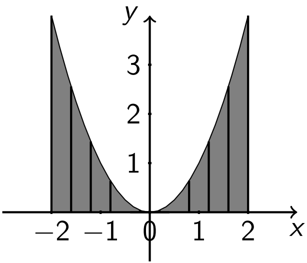
Želimo određeni integral I definirati za što širu klasu *ograničenih* funkcija na segmentu.

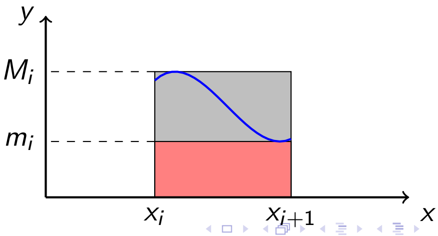
Ideja rješenja problema površine zakrivljenog lika potječe još od Arhimeda. U definiciji određenog integrala površinu rastavljamo na pravokutnike kojima je jedna stranica na x-osi (podinterval područja integriranja $[a, b]$) i dvije su okomite na nju, a čevrta stranica prolazi kroz ,,najnižu" odnosno ,,najvišu" točku grafa (,,donje" i ,,gornje" pravokutnike):



Prava definicija određenog (Riemannovog) integrala

Želimo određeni integral I definirati za što širu klasu *ograničenih* funkcija na segmentu.
Ideja rješenja problema površine zakrivljenog lika potječe još od Arhimeda. U definiciji određenog integrala površinu rastavljamo na pravokutnike kojima je jedna stranica na x-osi (podinterval područja integriranja $[a, b]$) i dvije su okomite na nju, a čevrta stranica prolazi kroz ,,najnižu" odnosno ,,najvišu" točku grafa (,,donje" i ,,gornje" pravokutnike):





- Zadano: ograničena funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($m \leq f(x) \leq M$ za sve x).
- Varijabilno: $n \in \mathbb{N}$ i subdivizija σ područja integriranja na n podintervala:

  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b;$

- Zadano: ograničena funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($m \leq f(x) \leq M$ za sve x).
- Varijabilno: $n \in \mathbb{N}$ i subdivizija σ područja integriranja na n podintervala:

  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Za tu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina

- Zadano: ograničena funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($m \leq f(x) \leq M$ za sve x).
- Varijabilno: $n \in \mathbb{N}$ i subdivizija σ područja integriranja na n podintervala:
  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Za tu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1}$.

- Zadano: ograničena funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($m \leq f(x) \leq M$ za sve x).
- Varijabilno: $n \in \mathbb{N}$ i subdivizija σ područja integriranja na n podintervala:

  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Za tu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$.
- Za $i = 0, \ldots, n-1$ i-ti podinterval je $S_i = [x_i, x_{i+1}]$ duljine („širine“) $x_{i+1} - x_i$; označimo s d_σ najveću od njih. Označimo s m_i „najmanju“ vrijednost od F na S_i, a s M_i „najveću“.
- i-ti donji pravokutnik onda ima „površinu“

- Zadano: ograničena funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($m \leq f(x) \leq M$ za sve x).
- Varijabilno: $n \in \mathbb{N}$ i subdivizija σ područja integriranja na n podintervala:
  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Za tu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$.
- Za $i = 0, \ldots, n-1$ i-ti podinterval je $S_i = [x_i, x_{i+1}]$ duljine (,,širine") $x_{i+1} - x_i$; označimo s d_σ najveću od njih. Označimo s m_i ,,najmanju" vrijednost od F na S_i, a s M_i ,,najveću".
- i-ti donji pravokutnik onda ima ,,površinu"
  $p_i = m_i(x_{i+1} - x_i)$, a gornji $P_i = M_i(x_{i+1} - x_i)$.

- Zadano: ograničena funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($m \leq f(x) \leq M$ za sve x).
- Varijabilno: $n \in \mathbb{N}$ i subdivizija σ područja integriranja na n podintervala:
  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Za tu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1}$.
- Za $i = 0, \ldots, n-1$ i-ti podinterval je $S_i = [x_i, x_{i+1}]$ duljine (,,širine") $x_{i+1} - x_i$; označimo s d_σ najveću od njih. Označimo s m_i ,,najmanju" vrijednost od F na S_i, a s M_i ,,najveću".
- i-ti donji pravokutnik onda ima ,,površinu" $p_i = m_i(x_{i+1} - x_i)$, a gornji $P_i = M_i(x_{i+1} - x_i)$.
- Definiramo gornju i donju integralnu (Darbouxovu) sumu funkcije F za danu subdiviziju:

$$s_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} p_i, \quad S\sigma_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} P_i.$$

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b-a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b-a).$$

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b-a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b-a).$$

Kad bismo gledali *nizove* svih mogućih donjih i gornjih suma, oni posjedovuju ,,limese" $\underline{I}$ i $\overline{I}$ kad $d_\sigma \to 0$ i $\underline{I} \leq \overline{I}$.

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b-a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b-a).$$

Kad bismo gledali *nizove* svih mogućih donjih i gornjih suma, oni posjedovuju „limese" $\underline{I}$ i $\overline{I}$ kad $d_\sigma \to 0$ i $\underline{I} \leq \overline{I}$.
Ako je $\underline{I} = \overline{I}$, kažemo da je F (Riemann) integrabilna na $[a, b]$ i tu zajedničku vrijednost označavamo s

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b-a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b-a).$$

Kad bismo gledali *nizove* svih mogućih donjih i gornjih suma, oni posjedovuju ,,limese" $\underline{I}$ i $\overline{I}$ kad $d_\sigma \to 0$ i $\underline{I} \leq \overline{I}$.
Ako je $\underline{I} = \overline{I}$, kažemo da je F (Riemann) integrabilna na $[a, b]$ i tu zajedničku vrijednost označavamo s

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Svaka neprekidna, ali i svaka mononotona ograničena funkcija je Riemann-integrabilna. Možete li smisliti primjer neintegrabilne funkcije?

Zapravo je samo jedan integral

Određeni integral može se izračunati pomoću neodređenog i obrnuto! Kako se zove teorem koji to garantira?

Zapravo je samo jedan integral

Određeni integral može se izračunati pomoću neodređenog i obrnuto! Kako se zove teorem koji to garantira? Za kakve funkcije on vrijedi?

Zapravo je samo jedan integral

Određeni integral može se izračunati pomoću neodređenog i obrnuto! Kako se zove teorem koji to garantira? Za kakve funkcije on vrijedi?

Teorem (Osnovni teorem infinitezimalnog računa (Newton-Leibnizova formula))

Ako je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna, onda je* $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$f^*(x) = \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b]$$

antiderivacija od F *na* $\langle a, b \rangle$ *i za svaku antiderivaciju* f *od* F *vrijedi Newton-Leibnizova formula*

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Korolar

Za neprekidnu $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ i svaku njenu antiderivaciju f vrijedi:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], \quad F(x) = \left(\int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t\right)',$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x), \quad \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Korolar

Za neprekidnu $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i svaku njenu antiderivaciju* f *vrijedi:*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b], \quad F(x) = \left(\int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t\right)',$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x), \quad \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Kako Newton-Leibnizovu formulu iskoristiti za po dijelovima neprekidne funkcije?

Korolar

Za neprekidnu $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i svaku njenu antiderivaciju* f *vrijedi:*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b], \quad F(x) = \left(\int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t\right)',$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x), \quad \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Kako Newton-Leibnizovu formulu iskoristiti za po dijelovima neprekidne funkcije? Definirajte $\ln x$ za $x \geq 1$ pomoću integrala!

Korolar

Za neprekidnu $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i svaku njenu antiderivaciju* f *vrijedi:*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b], \quad F(x) = \left(\int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t\right)',$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x), \quad \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Kako Newton-Leibnizovu formulu iskoristiti za po dijelovima neprekidne funkcije? Definirajte $\ln x$ za $x \geq 1$ pomoću integrala!

Zadatak

Za

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}.$$

izračunajte $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.