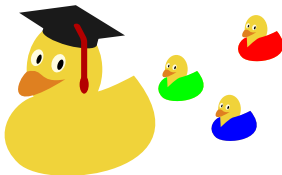


20. predavanje: Integrabilnost. Teoremi srednje vrijednosti.

Franka Miriam Brückler



Kako glasi Newton-Leibnizova formula?

Integrabilnost

Kako glasi Newton-Leibnizova formula? Za kakve podintegralne funkcije vrijedi?

Integrabilnost

Kako glasi Newton-Leibnizova formula? Za kakve podintegralne funkcije vrijedi? Što je neodređeni integral?

Integrabilnost

Kako glasi Newton-Leibnizova formula? Za kakve podintegralne funkcije vrijedi? Što je neodređeni integral?

Osnovni uvjet da bi se **određeni integral** funkcije $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mogao definirati je da je ona **ograničena**:

$$m \leq F(x) \leq M$$

za sve $x \in [a, b]$. Otkud znamo da su sve neprekidne funkcije ograničene?

Integrabilnost

Kako glasi Newton-Leibnizova formula? Za kakve podintegralne funkcije vrijedi? Što je neodređeni integral?

Osnovni uvjet da bi se **određeni integral** funkcije $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mogao definirati je da je ona **ograničena**:

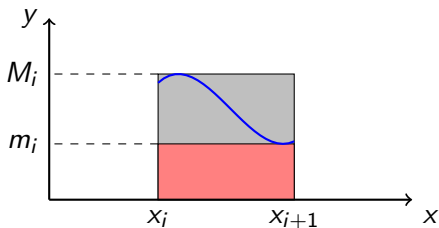
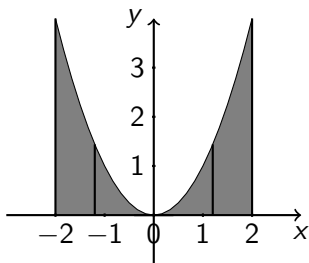
$$m \leq F(x) \leq M$$

za sve $x \in [a, b]$. Otkud znamo da su sve neprekidne funkcije ograničene?

Subdivizija σ segmenta $[a, b]$ na neki broj n dijelova:

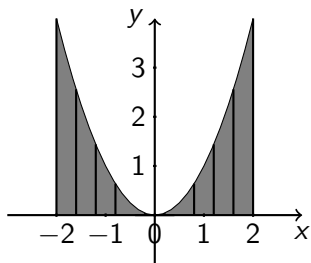
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

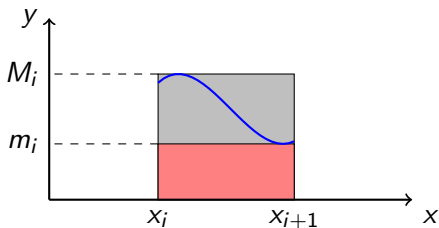
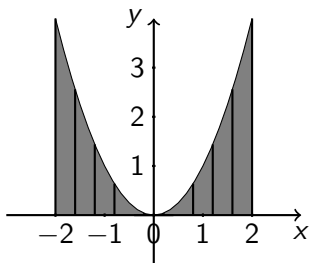
Subdivizija je ekvidistantna ako je $x_{i+1} - x_i$ jednako za sve i (Δx).



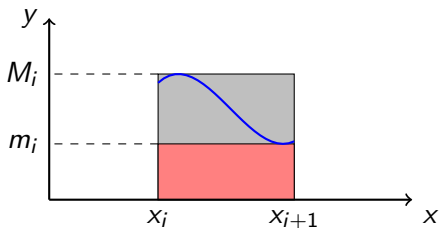
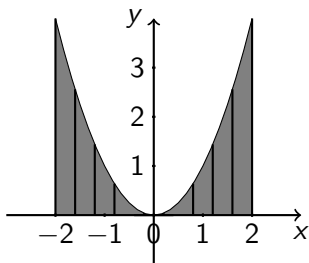
- Za danu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}$. Označimo s m_i „najmanju“ vrijednost od F na S_i , a s M_i „najveću“. Tada i -ti donji pravokutnik ima „površinu“ $p_i = m_i (x_{i+1} - x_i)$, a gornji $P_i = M_i (x_{i+1} - x_i)$.
- Definiramo gornju i donju **integralnu sumu** funkcije F za danu subdiviziju:

$$s_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} p_i, \quad S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} P_i.$$





- Za danu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}$. Označimo s m_i „najmanju“ vrijednost od F na S_i , a s M_i „najveću“. Tada i -ti donji pravokutnik ima „površinu“ $p_i = m_i (x_{i+1} - x_i)$, a gornji $P_i = M_i (x_{i+1} - x_i)$.



- Za danu subdiviziju gornji i donji pravokutnici imaju horizontalne stranice duljina $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}$. Označimo s m_i „najmanju“ vrijednost od F na S_i , a s M_i „najveću“. Tada i -ti donji pravokutnik ima „površinu“ $p_i = m_i (x_{i+1} - x_i)$, a gornji $P_i = M_i (x_{i+1} - x_i)$.
- Definiramo gornju i donju **integralnu sumu** funkcije F za danu subdiviziju:

$$s_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} p_i, \quad S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} P_i.$$

gornje sume i donje sume

gornje sume i donje sume

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b - a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b - a).$$

gornje sume i donje sume

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b - a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b - a).$$

Kad bismo gledali *nizove* svih mogućih donjih i gornjih suma, oni posjeduju „limese“ $\underline{I}$ i $\bar{I}$ kad maksimalna širina podintervala u subdiviziji $d_\sigma \rightarrow 0$. Pritom je očito $\underline{I} \leq \bar{I}$.

gornje sume i donje sume

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b-a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b-a).$$

Kad bismo gledali *nizove* svih mogućih donjih i gornjih suma, oni posjeduju „limese“ $\underline{I}$ i $\bar{I}$ kad maksimalna širina podintervala u subdiviziji $d_\sigma \rightarrow 0$. Pritom je očito $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Ako je $\underline{I} = \bar{I}$, kažemo da je F (Riemann) integrabilna na $[a, b]$ i tu zajedničku vrijednost označavamo s

$$\int_a^b F(x) dx.$$

gornje sume i donje sume

Očito je za svaku subdiviziju

$$m(b - a) \leq s_\sigma \leq I \leq S_\sigma = M(b - a).$$

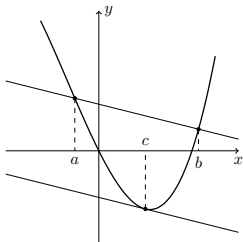
Kad bismo gledali *nizove* svih mogućih donjih i gornjih suma, oni posjedovuju „limese“ $\underline{I}$ i $\bar{I}$ kad maksimalna širina podintervala u subdiviziji $d_\sigma \rightarrow 0$. Pritom je očito $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Ako je $\underline{I} = \bar{I}$, kažemo da je F (Riemann) integrabilna na $[a, b]$ i tu zajedničku vrijednost označavamo s

$$\int_a^b F(x) dx.$$

Svaka po dijelovima neprekidna, ali i svaka monotonna ograničena funkcija je Riemann-integrabilna. Možete li smisliti primjer neintegrabilne (ograničene) funkcije?

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti 🐣



Lagrangeov teorem srednje vrijednosti

Ako je realna funkcija jedne varijable f derivabilna na otvorenom intervalu I , onda za svaka dva broja $a, b \in I$ (pri čemu je $a < b$) postoji broj $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zadatak

Dokažite Rolleov teorem: Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna i $a, b \in I$ ($a < b$) te ako je $f(a) = f(b)$, onda f ima bar jednu stacionarnu točku unutar intervala $\langle a, b \rangle$.

Zadatak

Dokažite Rolleov teorem: Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna i $a, b \in I$ ($a < b$) te ako je $f(a) = f(b)$, onda f ima bar jednu stacionarnu točku unutar intervala $\langle a, b \rangle$.

Zadatak

Za neku funkciju vrijedi $f(2) = 1$ i $f'(x) \leq 5$ za sve realne x . Pokažite da je $f(5) \leq 16$ i $f(-1) \geq -14$.

Zadatak

Dokažite Rolleov teorem: Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna i $a, b \in I$ ($a < b$) te ako je $f(a) = f(b)$, onda f ima bar jednu stacionarnu točku unutar intervala $\langle a, b \rangle$.

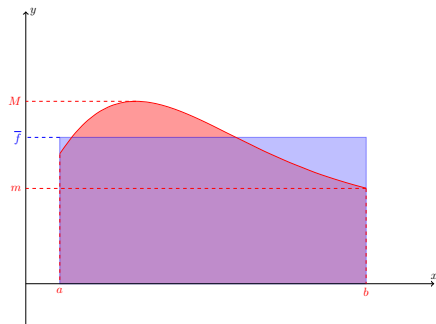
Zadatak

Za neku funkciju vrijedi $f(2) = 1$ i $f'(x) \leq 5$ za sve realne x . Pokažite da je $f(5) \leq 16$ i $f(-1) \geq -14$.

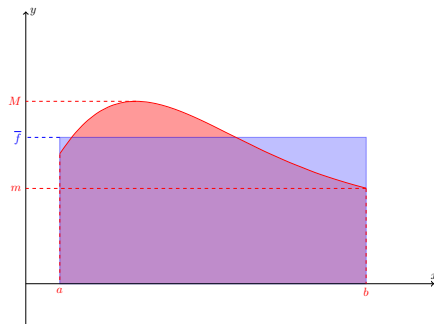
Zadatak

Dokažite da jednačina $x^3 + 25x + 8 = 7x^2$ ima tačno jedno realno rješenje. Koji mu je predznak i red veličine?

Teorem srednje vrijednosti za integrale 🐣



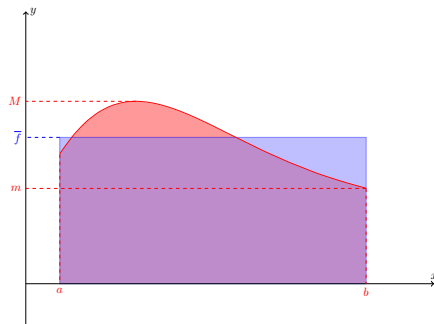
Teorem srednje vrijednost za integrale 🐣



Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost,

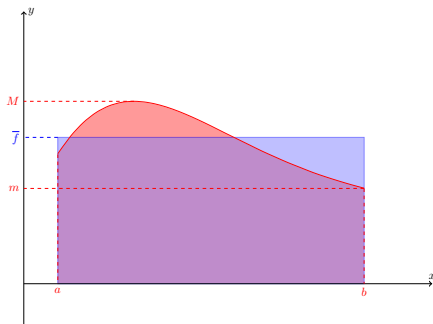
Teorem srednje vrijednost za integrale 🎓



Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost, onda je $(b - a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)M$,

Teorem srednje vrijednost za integrale 🎓



Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost, onda je $(b - a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)M$, odnosno postoji ordinata $\bar{f} \in [m, M]$ takva da je $\int_a^b f(x) dx = \bar{f} \cdot (b - a)$.

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\bar{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\bar{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?
- Zašto nema smisla staviti $\bar{f} = \frac{1}{2} (f(a) + f(b))$?

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\bar{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?
- Zašto nema smisla staviti $\bar{f} = \frac{1}{2} (f(a) + f(b))$?
- Povežite teorem srednje vrijednosti za integrale s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti za derivacije!

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\bar{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?
- Zašto nema smisla staviti $\bar{f} = \frac{1}{2} (f(a) + f(b))$?
- Povežite teorem srednje vrijednosti za integrale s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti za derivacije!
- Trajanje dana se može približno opisati formulom

$$D(t) = 12 \text{ h} + 4 \text{ h} \cdot \sin \frac{2\pi t}{365 \text{ dana}},$$

gdje kao trenutak $t = 0$ uzimamo trenutak proljetnog ekvinocija (početak proljeća). Uzmemo li da je zima zadnja četvrtina godine (od dana 274 do dana 365), koje je prosječno trajanje dana tijekom zime?