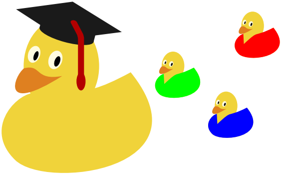
21. predavanje: Osnovne metode integriranja. Nepravi integrali.

Franka Miriam Brückler



Parcijalna integracija

- Podsjetnik oko notacije:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Parcijalna integracija 

- Podsjetnik oko notacije:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Izvedite formulu parcijalne integracije za određene integrale.

Parcijalna integracija

- Podsjetnik oko notacije:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Izvedite formulu parcijalne integracije za određene integrale.
- Koja su tri standardna slučaja primjene metode parcijalne integracije?

Parcijalna integracija

- Podsjetnik oko notacije:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Izvedite formulu parcijalne integracije za određene integrale.
- Koja su tri standardna slučaja primjene metode parcijalne integracije?
- Izračunajte neodređene integrale od
  - $\log x$,
  - $x \exp(x)$ i
  - $\frac{\ln x}{x^2}$.

Metoda supstitucije

- Izvedite formulu metode supstitucije za neodređene integrale.

Metoda supstitucije

- Izvedite formulu metode supstitucije za neodređene integrale.
- Izračunajte neodređene integrale od
  - $2x\cos(x^2)$,
  - $\dfrac{x}{x^2-6x+9}$,
  - $\dfrac{1}{a\,x+b}$ s $a \neq 0$,
  - $\sin\sqrt{x}$,
  - $\dfrac{1}{2x^2+3}$.

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo rastaviti na parcijalne razlomke. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroja više racionalnih funkcija?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2 - 1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo rastaviti na parcijalne razlomke. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroja više racionalnih funkcija? Koja su dva osnovna oblika parcijalnih razlomaka?

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2-1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo rastaviti na parcijalne razlomke. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroja više racionalnih funkcija? Koja su dva osnovna oblika parcijalnih razlomaka?

$$\frac{A}{(x-c)^k} \quad \text{i} \quad \frac{B\,x+C}{(x^2+p\,x+q)^k},$$

pri čemu drugi oblik dolazi u obzir samo ako je

Integriranje racionalnih funkcija

- Što su racionalne funkcije? Racionalnu funkciju nazivamo pravom racionalnom funkcijom ako joj je brojnik manjeg stupnja od nazivnika. Kako ne-pravu racionalnu funkciju zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije? Napravite to na primjeru funkcije $R(x) = x^3/(x^2-1)$.
- Svaku pravu racionalnu funkciju možemo rastaviti na parcijalne razlomke. Je li rastav na parcijalne razlomke bilo koji zapis prave racionalne funkcije kao zbroja više racionalnih funkcija? Koja su dva osnovna oblika parcijalnih razlomaka?

$$\frac{A}{(x-c)^k} \quad \text{i} \quad \frac{B\,x+C}{(x^2+p\,x+q)^k},$$

pri čemu drugi oblik dolazi u obzir samo ako je $p^2 < 4q$.

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik. Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R.

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.
Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R.
Ako nazivnik ima onoliko različitih realnih nultočaka koliki mu je stupanj (što nam to govori o njihovim kratnostima?

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.
Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R.
Ako nazivnik ima onoliko različitih realnih nultočaka koliki mu je stupanj (što nam to govori o njihovim kratnostima? a o kompleksnim nultočkama?)

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.
Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R.
Ako nazivnik ima onoliko različitih realnih nultočaka koliki mu je stupanj (što nam to govori o njihovim kratnostima? a o kompleksnim nultočkama?) svaka od tih nultočaka c doprinosi jednim parcijalnim razlomkom tipa $\frac{A}{x-c}$.
Za funkciju R zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke njezinog pravog racionalnog dijela. Kako odrediti iznose konstanti A u tim razlomcima?

Rastav na parcijalne razlomke #1

Da bismo mogli odrediti oblik rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke prvo treba potpuno faktorizirati nazivnik.
Učinite to za pravi racionalni dio funkcije R.
Ako nazivnik ima onoliko različitih realnih nultočaka koliki mu je stupanj (što nam to govori o njihovim kratnostima? a o kompleksnim nultočkama?) svaka od tih nultočaka c doprinosi jednim parcijalnim razlomkom tipa $\frac{A}{x-c}$.
Za funkciju R zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke njezinog pravog racionalnog dijela. Kako odrediti iznose konstanti A u tim razlomcima?

Zadatak

$$R(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1};$$

$$\int_{-5}^{-2} R(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Rastav na parcijalne razlomke #2

Ako nazivnik racionalne funkcije ima isključivo realne nultočke, tj. zbroj kratnosti svih realnih nultočaka jednak je

Rastav na parcijalne razlomke #2

Ako nazivnik racionalne funkcije ima isključivo realne nultočke, tj. zbroj kratnosti svih realnih nultočaka jednak je stupnju nazivnika, onda svaka realna nultočka c određuje onoliko parcijalnih razlomaka tipa $\frac{A}{(x-c)^k}$ kolika joj je kratnost — redom s $k = 1, 2, \ldots$

Rastav na parcijalne razlomke #2

Ako nazivnik racionalne funkcije ima isključivo realne nultočke, tj. zbroj kratnosti svih realnih nultočaka jednak je stupnju nazivnika, onda svaka realna nultočka c određuje onoliko parcijalnih razlomaka tipa $\frac{A}{(x-c)^k}$ kolika joj je kratnost — redom s $k = 1, 2, \ldots$

Zadatak

$$\int \frac{15x^4 - x^3 + 6x^2 - 18}{5x^3 - 2x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Rastav na parcijalne razlomke #3

Ako se nazivnik racionalne funkcije ne može do kraja faktorizirati na afine faktore, tj. ima i ne-realnih nultočaka, dakle u faktoriziranom obliku

Rastav na parcijalne razlomke #3

Ako se nazivnik racionalne funkcije ne može do kraja faktorizirati na afine faktore, tj. ima i ne-realnih nultočaka, dakle u faktoriziranom obliku sadrži i kvadratne faktore $x^2 + p\,x + q$ bez realnih nultočaka ($p^2 < 4q$), onda svaki takav faktor određuje onoliko parcijalnih razlomaka $\frac{B\,x+C}{(x^2+p\,x+q)^k}$ s kolikom se potencijom pojavljuje u faktoriziranom obliku — redom s $k = 1, 2, \ldots$

Rastav na parcijalne razlomke #3

Ako se nazivnik racionalne funkcije ne može do kraja faktorizirati na afine faktore, tj. ima i ne-realnih nultočaka, dakle u faktoriziranom obliku sadrži i kvadratne faktore $x^2 + p\,x + q$ bez realnih nultočaka ($p^2 < 4q$), onda svaki takav faktor određuje onoliko parcijalnih razlomaka $\frac{B\,x+C}{(x^2+p\,x+q)^k}$ s kolikom se potencijom pojavljuje u faktoriziranom obliku — redom s $k = 1, 2, \ldots$

Zadatak

$$\int \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} = ?$$

Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} = ?$$

Zadatak

$$\int_1^\infty \exp(-x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = ?$$

Zadatak

$$\int_1^\infty \exp(-x)\, dx = ?$$

Određeni (Riemannov) integral definiran je samo za

Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} = ?$$

Zadatak

$$\int_1^\infty \exp(-x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Određeni (Riemannov) integral definiran je samo za ograničene funkcije na ograničenom području integriranja.

Nepravi integrali ...

...su integrali koji podsjećaju na određene integrale jer su im definirane granice integriranja, ali je funkcija na intervalu integriranja neograničena ili je interval integriranja neograničen.

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \infty ?!$$

Neograničeno $\neq$ beskonačno

Ako je površina nečega opisiva kao $P(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$ za rastući $x > 0$, onda ona ne postaje beskonačno velika iako s rastućim x i ona raste: $\lim_{x\to+\infty} P(x) = 2$.

$$\int_1^5 \frac{dx}{x-2} = \infty ?!$$

Neograničeno $\neq$ beskonačno

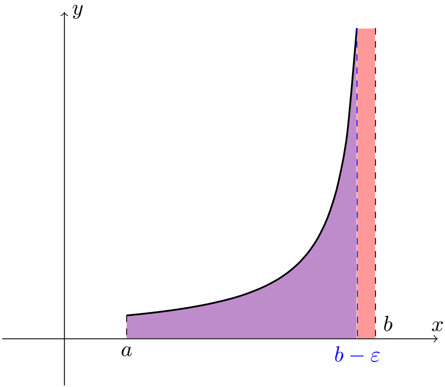
Ako je površina nečega opisiva kao $P(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$ za rastući $x > 0$, onda ona ne postaje beskonačno velika iako s rastućim x i ona raste: $\lim_{x\to+\infty} P(x) = 2$.

Primjeri nepravih integrala

$$\int_0^1 \ln x \, dx, \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx, \int_0^3 \frac{dx}{x-1},$$

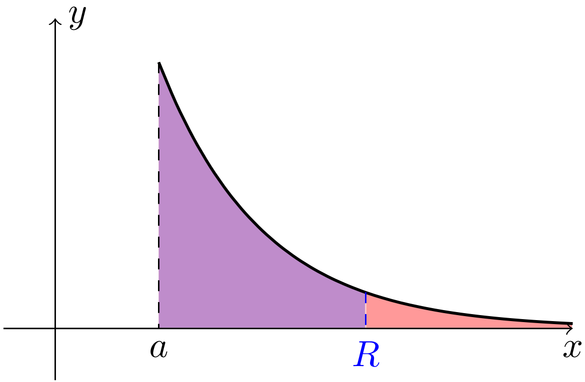
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \int_{-\infty}^5 \frac{dx}{1+x^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

Nepravi integrali s neograničenom podintegralnom funkcijom



Definirajte $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za f koja unutar $[a, b]$ ima vertikalnu asimptotu!

Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja



Definirajte $\int_a^b f(x)\,dx$ ako je bar jedno od a i b beskonačno!

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiraju integrali

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x?$$

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergiraju integrali*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{i} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx?$$

Zadatak

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = ?$$

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergiraju integrali*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{i} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx?$$

Zadatak

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = ? \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$$

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergiraju integrali*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{i} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx?$$

Zadatak

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = ? \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$$

Zadatak

Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *neparna, mora li biti* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$?

Kakva treba biti podintegralna funkcija ...

... da bi bilo šanse da njen integral od 0 do $+\infty$ konvergira?