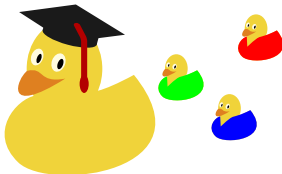


21. predavanje: Nepravi integrali.

Franka Miriam Brückler



Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = ?$$

Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = ?$$

Zadatak

$$\int_1^{\infty} \exp(-x) dx = ?$$

Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = ?$$

Zadatak

$$\int_1^{\infty} \exp(-x) dx = ?$$

Određeni (Riemannov) integral definiran je samo za

Nepravi integrali

Zadatak

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = ?$$

Zadatak

$$\int_1^{\infty} \exp(-x) dx = ?$$

Određeni (Riemannov) integral definiran je samo za ograničene funkcije na ograničenom području integriranja.

Nepravi integrali ...

... su integrali koji podsjećaju na određene integrale jer su im definirane granice integriranja, ali ili je funkcija na intervalu integriranja neograničena ili je interval integriranja neograničen.

Primjeri nepravih integrala

$$\int_0^1 \ln x \, dx, \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx, \int_0^3 \frac{dx}{x-1},$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \int_{-\infty}^5 \frac{dx}{1+x^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

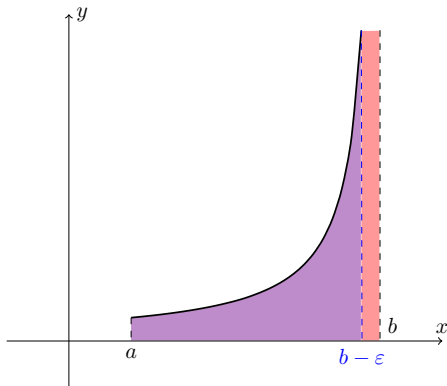
Primjeri nepravih integrala

$$\int_0^1 \ln x \, dx, \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx, \int_0^3 \frac{dx}{x-1},$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \int_{-\infty}^5 \frac{dx}{1+x^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

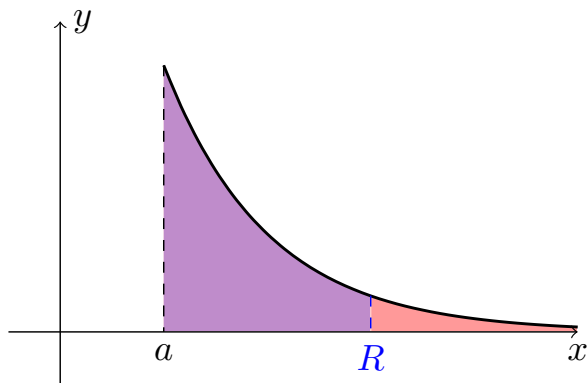
Neograničena površina $\neq$ beskonačna površina

Ako je površina nečega opisiva kao $P(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$ za rastući $x > 0$, onda ona ne postaje beskonačno velika iako s rastućim x i ona raste: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 2$.

Nepravi integrali s neograničenom podintegralnom funkcijom 🐣



Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja



Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravni integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = ?$$

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravni integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} =? \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =?$$

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = ? \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$$

Zadatak

Konvergiraju li integrali

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{i} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

za $\alpha = 1$ i za $\alpha = 2$?

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Zadatak

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = ? \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$$

Zadatak

Konvergiraju li integrali

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{i} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

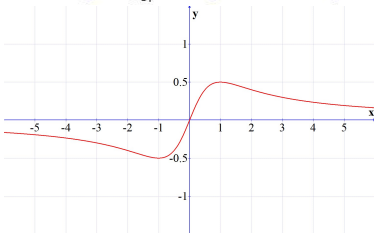
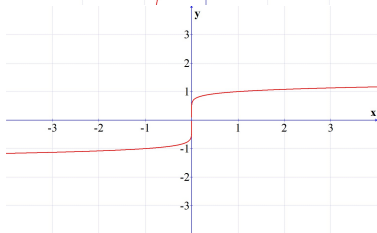
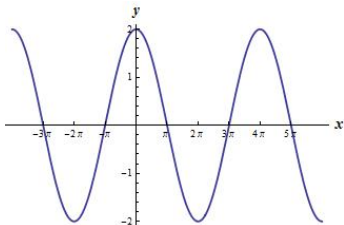
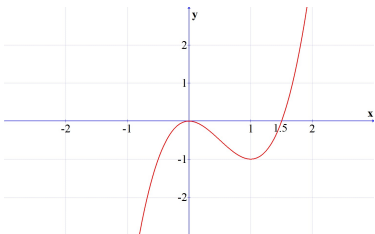
za $\alpha = 1$ i za $\alpha = 2$?

Oprez: Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neparna, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ samo ako

konvergira $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$.

Kakva treba biti podintegralna funkcija ...

... da bi bilo šanse da njen integral od 0 do $+\infty$ konvergira?



Dvije korisne formule

Što su faktorijsli i kako se interpretiraju?

Dvije korisne formule

Što su faktorijseli i kako se interpretiraju? **Gama-funkcija** je primjer neelementarne funkcije zadane integralom:

$$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dvije korisne formule

Što su faktorijseli i kako se interpretiraju? **Gama-funkcija** je primjer neelementarne funkcije zadane integralom:

$$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-ax) dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, a > 0.$$

Dvije korisne formule

Što su faktorijeli i kako se interpretiraju? **Gama-funkcija** je primjer neelementarne funkcije zadane integralom:

$$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-ax) dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, a > 0.$$

Postoje integrabiln funkcije čija antiderivacija nije elementarna funkcija, npr.

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Za $x = +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Osnove teorije vjerojatnosti

- **Slučajni pokus:** aktivnost čiji ishod nije moguće unaprijed predvidjeti.
- **Vjerojatnosni prostor:** skup Ω svih mogućih ishoda nekog slučajnog pokusa.
- **Elementarni događaj:** element x vjerojatnosnog prostora.
- **(Slučajni) događaj:** podskup A vjerojatnosnog prostora.
- **Slučajna varijabla:** funkcija $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (**kontinuirana** je ako joj je slika interval).
- **Vjerojatnost** je funkcija p koja svakom slučajnom događaju A pridružuje njegovu vjerojatnost $p(A) \in \mathbb{R}$, tako da vrijedi:
 - 1 $p(A) \geq 0$ za sve A ;
 - 2 $p(\Omega) = 1$;
 - 3 ako je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve parove indeksa i, j , onda je

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots$$

Zadatak

Dokažite da je za svaki događaj A uvijek $p(A) \in [0, 1]$ i $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Zadatak

Dokažite da je za svaki događaj A uvijek $p(A) \in [0, 1]$ i $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju **funkciju gustoće vjerojatnosti** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

Zadatak

Dokažite da je za svaki događaj A uvijek $p(A) \in [0, 1]$ i $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju **funkciju gustoće vjerojatnosti** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

- φ je nenegativna.

Zadatak

Dokažite da je za svaki događaj A uvijek $p(A) \in [0, 1]$ i $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju **funkciju gustoće vjerojatnosti** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za x -eve koji nisu u slici slučajne varijable.

Zadatak

Dokažite da je za svaki događaj A uvijek $p(A) \in [0, 1]$ i $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju **funkciju gustoće vjerojatnosti** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za x -eve koji nisu u slici slučajne varijable.
- **Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Zadatak

Dokažite da je za svaki događaj A uvijek $p(A) \in [0, 1]$ i $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju **funkciju gustoće vjerojatnosti** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za x -eve koji nisu u slici slučajne varijable.
- **Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Dakle, φ sigurno ima x -os kao obostanu HA.

Zadatak

Dokažite da je za svaki događaj A uvijek $p(A) \in [0, 1]$ i $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju **funkciju gustoće vjerojatnosti** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za x -eve koji nisu u slici slučajne varijable.
- **Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Dakle, φ sigurno ima x -os kao obostanu HA.

- $p(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$

Zadatak

Dokažite da ako je X kontinuirana slučajna varijabla koja posjeduje funkciju gustoće vjerojatnosti, onda je za svaki $a, b \in \mathbb{R}$

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

i specijalno $p(X = a) = 0$.

Zadatak

Dokažite da ako je X kontinuirana slučajna varijabla koja posjeduje funkciju gustoće vjerojatnosti, onda je za svaki $a, b \in \mathbb{R}$

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

i specijalno $p(X = a) = 0$.

Očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost) kontinuirane slučajne varijable X s funkcijom gustoće vjerojatnosti φ :

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx.$$

Za valnu funkciju (orbitalu) ψ , funkcija $\varphi = |\psi|^2 = \psi^*\psi$ je realna. Prema **Bornovoj interpretaciji valne funkcije**, ta funkcija je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ unutar razmatranog prostora. Često se koristi i **radijalna gustoća vjerojatnosti**

$$\phi(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2,$$

koja je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ na udaljenosti r od jezgre.

Zadatak

2s-orbitala za vodikov atom je valna funkcija

$\psi_{2,0,0}(r) = N \left(2 - \frac{r}{a_0} \right) \exp \left(-\frac{r}{2a_0} \right)$. Koliko iznosi N ? Koliko iznosi očekivani polumjer R vodikove 2s-orbitale? Koliko iznosi $p(r = R)$? Kolika je vjerojatnost da vodikov 2s-elektron bude na udaljenosti između a_0 i očekivane?

Skalarni produkt integrabilnih funkcija zadanih na intervalu I je integral njihova umnoška s područjem integriranja I . Ako im je skalarni produkt 0, kažemo da su **ortogonalne**.

Skalarni produkt integrabilnih funkcija zadanih na intervalu I je integral njihova umnoška s područjem integriranja I . Ako im je skalarni produkt 0, kažemo da su **ortogonalne**.

Zadatak

Čestica u jednodimenzionalnoj kutiji je čestica koja se može gibati samo unutar segmenta $[0, a]$. Pripadne valne funkcije dane su (za kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}_0$) formulom

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Skicirajte ih!

Dokažite da su valne funkcije čestice u jednodimenzionalnoj kutiji za različite kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}$ međusobno ortogonalne.

Izračunajte vjerojatnost P da se čestica kvantnog broja n nađe u srednjoj trećini kutije! Odredite konstante normiranja A_n i očekivanu vrijednost $\langle x \rangle$ položaja čestice za svaki n .