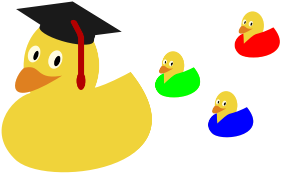
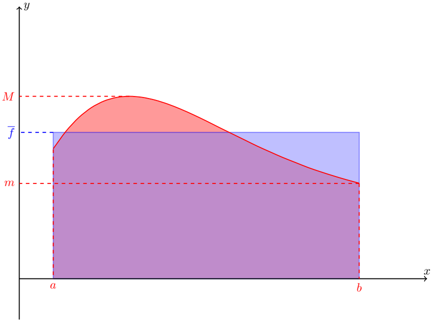
22. predavanje: Primjene integrala.

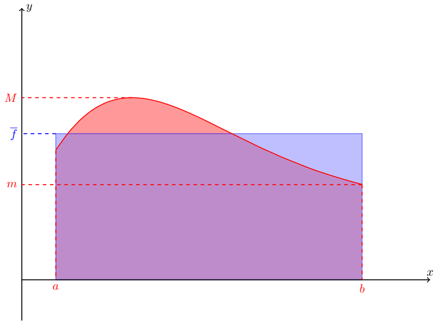
Franka Miriam Brückler



Teorem srednje vrijednosti za integrale



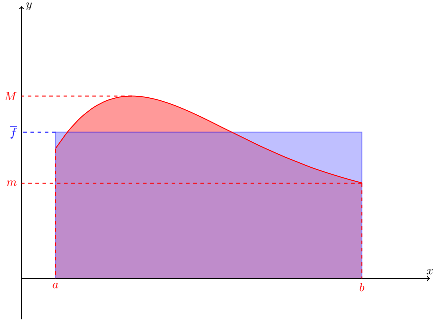
Teorem srednje vrijednost za integrale



Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost,

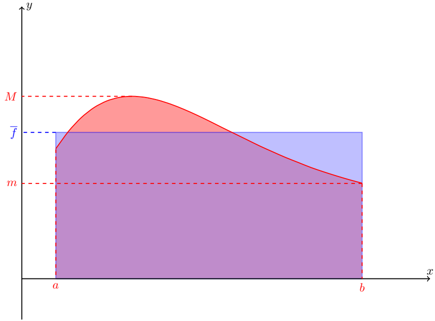
Teorem srednje vrijednost za integrale



Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost,onda je $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M$,

Teorem srednje vrijednost za integrale



Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost,onda je $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)M$, odnosno postoji ordinata $\overline{f} \in [m, M]$ takva da je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{f} \cdot (b-a)$.

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\overline{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\overline{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?
- Zašto nema smisla staviti $\overline{f} = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$?

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\overline{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?
- Zašto nema smisla staviti $\overline{f} = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$?
- Povežite teorem srednje vrjednosti za integrale s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti za derivacije!

Prosječna (srednja) vrijednosti (po dijelovima neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Koja je mjerna jedinica od $\overline{f}$ ako znamo mjerne jedinice od x i $f(x)$?
- Zašto nema smisla staviti $\overline{f} = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$?
- Povežite teorem srednje vrjednosti za integrale s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti za derivacije!
- Trajanje dana se može približno opisati formulom

  $$D(t) = 12\,\mathrm{h} + 4\,\mathrm{h}\cdot\sin\frac{2\pi t}{365\,\mathrm{dana}},$$

  gdje kao trenutak $t = 0$ uzimamo trenutak proljetnog ekvinocija (početak proljeća). Uzmemo li da je zima zadnja četvrtina godine (od dana 274 do dana 365), koje je prosječno trajanje dana tijekom zime?

Iz brzine do onog što se mijenja

Zadatak

Trenutna koncentracija c bilo kojeg sudionika reakcije (čiji stehiometrijski koeficijent je ν

Iz brzine do onog što se mijenja

Zadatak

Trenutna koncentracija c bilo kojeg sudionika reakcije (čiji stehiometrijski koeficijent je ν i početna koncentracija c_0) je dana formulom $c = c_0 + \nu\, x$, gdje je $x = x(t)$ veličina takva da je brzina reakcije $v = \dot{x}$ i $x(0) = 0$. Ako je reakcija stehiometrije $\mathrm{A} + 2\mathrm{B} \to \mathrm{P}$ i $v = k\, c_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{B}}$ i a i b početne koncentracije reaktanata, skicirajte ovisnost kvocijenta koncentracija reaktanata o vremenu!

Općenito

Neka je $Y = Y(t)$ neka veličina ovisna o vremenu i neka je poznata funkcija brzina njezine promjene $\dot{Y} = \dot{Y}(t)$ te početni iznos $Y_0 = Y(0)$. Tada je

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t v(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Rad

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s
  $$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x;$$

Rad

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x;$$
- Volumni rad $w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);

Rad

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$;
- Volumni rad $w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);
- Kemijski rad $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n)\,\mathrm{d}n$ (za promjenu množine od n_1 do n_2; ovdje je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n);

Rad

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$;
- Volumni rad $w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);
- Kemijski rad $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n)\,\mathrm{d}n$ (za promjenu množine od n_1 do n_2; ovdje je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n);
- Električni rad $w = \int_a^b \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r$ (rad izvršen za pomicanje naboja q_1 od udaljenosti $r = a$ do udaljenosti $r = b$ u odnosu na naboj q_2; $k_e = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$ je Coulombova konstanta).

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_{\mathrm{k}}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\;\mathrm{d}t\} =$$

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_{\mathrm{k}}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\ \mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_{\mathrm{k}}.$$

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_\mathrm{k}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\ \mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_\mathrm{k}.$$

$w = -\Delta V$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x, onda mora postojati antiderivacija od F,

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_{\mathrm{k}}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\ \mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_{\mathrm{k}}.$$

$w = -\Delta V$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x, onda mora postojati antiderivacija od F, tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela.

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_{\text{k}}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\ \mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_{\text{k}}.$$

$w = -\Delta V$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x, onda mora postojati antiderivacija od F, tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela. U tom je slučaju
$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = -V(b) - (-V(a)) = -\Delta V$.

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama.

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama. U konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -Fx + C$)

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama. U konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -F\,x + C$) i sila elastične opruge $F(x) = -k\,x$ ($V(x) = \frac{k\,x^2}{2} + C$).

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama. U konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -F\,x + C$) i sila elastične opruge $F(x) = -k\,x$ ($V(x) = \frac{k\,x^2}{2} + C$).
Za takve sile kombinacija prethodna dva primjera daje

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\Delta V,$$

tj. zakon očuvanja energije.
Uočimo da se ne može definirati apsolutna ljestvica za potencijalnu energiju!

O volumnom radu pri reverzibilnoj ekspanziji/kompresiji

Idealni plin uz konstantnu temperaturu i množinu

$$w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = -nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Ako se recimo nekom idealnom plinu pri izotermnoj ekspanziji volumen povećao se osam puta, $w = -nRT\ln 8$.

O volumnom radu pri reverzibilnoj ekspanziji/kompresiji

Idealni plin uz konstantnu temperaturu i množinu

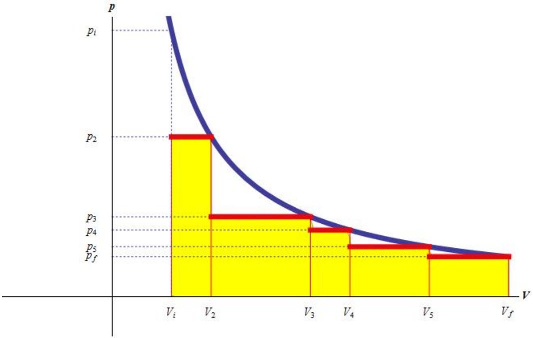
$$w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = -nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Ako se recimo nekom idealnom plinu pri izotermnoj ekspanziji volumen povećao se osam puta, $w = -nRT\ln 8$.

Primjer

Ako je tlak konstantan, izvršeni volumni rad je $w = p\Delta V$.

Reverzibilna ekspanzija/kompresija može se zamisliti kao niz ireverzibilnih ekspanzija/kompresija, kod kojih su promjene volumena infinitezimalno male. Kako se kod ireverzibilne promjene volumena izvršeni rad dobiva kao umnožak konačnog tlaka i iznosa promjene volumena, formula za reverzibilnu ekspanziju/kompresiju može se shvatiti kao specijalni slučaj definicije određenog integrala.



Osnove teorije vjerojatnosti za kvantnu teoriju

- Slučajni pokus: aktivnost čiji ishod nije moguće unaprijed predvidjeti.
- Vjerojatnosni prostor: skup Ω svih mogućih ishoda nekog slučajnog pokusa.
- Elementarni događaj: element x vjerojatnostnog prostora.
- (Slučajni) događaj: podskup A vjerojatnosnog prostora.
- Slučajna varijabla: funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Vjerojatnost je funkcija p koja svakom slučajnom događaju A pridružuje njegovu vjerojatnost $p(A) \in \mathbb{R}$, tako da vrijedi:
  1. $p(A) \geq 0$ za sve A;
  2. $p(\Omega) = 1$;
  3. ako je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve parove indeksa i, j, onda je

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots$$

Slučajne varijable mogu biti diskretne (ako im je slika konačna ili prebrojiva) ili kontinuirane (najčešće kad im je slika interval).

Primjer

Vjerojatnosni prostor za bacanje novčića je $\Omega = \{pismo, glava\}$. *Ako 'pismo' poistovjetimo s* 0, *a 'glavu' s* 1, *sveli smo pokus na diskretnu slučajnu varijablu* $X : \Omega \to \{0, 1\}$, *odnosno sve moguće rezultate na* $\{0, 1\}$.

Slučajne varijable mogu biti diskretne (ako im je slika konačna ili prebrojiva) ili kontinuirane (najčešće kad im je slika interval).

Primjer

Vjerojatnosni prostor za bacanje novčića je $\Omega = \{pismo, glava\}$. *Ako 'pismo' poistovjetimo s* 0, *a 'glavu' s* 1, *sveli smo pokus na diskretnu slučajnu varijablu* $X : \Omega \to \{0, 1\}$, *odnosno sve moguće rezultate na* $\{0, 1\}$.

Primjer

Opažanje elektrona unutar na nekoj udaljenosti do jezgre je primjer slučajnog pokusa, svaka konkretna udaljenost je elementarni događaj, a svaki raspon udaljenosti je primjer događaja. Moguće udaljenosti elektrona od jezgre su od $0\,\mathrm{pm}$ *naviše. Stoga pokus 'promatranja' udaljenosti elektrona do jezgre poistovjećujemo sa slučajnom varijablom* r *koja svakoj mogućoj udaljenosti pridružuje njen iznos podijeljena s, npr.,* pm. *To je kontinuirana slučajna varijabla sa slikom* $[0, +\infty\rangle$.

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

- φ je nenegativna.

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}$ koji nisu u slici slučajne varijable.

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}$ koji nisu u slici slučajne varijable.
- Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}$ koji nisu u slici slučajne varijable.
- Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostranu HA.

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}$ koji nisu u slici slučajne varijable.
- Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

  Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostanu HA.
- $p(X \geq a) = P(X > a) = \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}$ koji nisu u slici slučajne varijable.
- Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

  Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostranu HA.
- $p(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
- $p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$.

Funkcije gustoće vjerojatnosti

Većina kontinuiranih slučajnih varijabli ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

- φ je nenegativna.
- $\varphi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}$ koji nisu u slici slučajne varijable.
- Normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

  Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostranu HA.
- $p(X \geq a) = P(X > a) = \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$
- $p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = \int_{a}^{b} \varphi(x)\mathrm{d}x.$
- Za svaki $a \in \mathbb{R}$ je $p(X = a) = 0.$

Za valnu funkciju (orbitalu) ψ, funkcija $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ je realna. Prema Bornovoj interpretaciji valne funkcije, ta funkcija je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ negdje u prostoru (i ovisi o tri prostorne varijable). Često se koristi radijalna gustoća vjerojatnosti

$$\phi(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2,$$

koja je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ na udaljenosti r od jezgre.

Za valnu funkciju (orbitalu) ψ, funkcija $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ je realna. Prema Bornovoj interpretaciji valne funkcije, ta funkcija je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ negdje u prostoru (i ovisi o tri prostorne varijable). Često se koristi radijalna gustoća vjerojatnosti

$$\phi(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2,$$

koja je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ na udaljenosti r od jezgre.

Zadatak

2s-orbitala za vodikov atom je valna funkcija $\psi_{2,0,0}(r) = N\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$. Koliko iznosi N? Koliko iznosi $p(r = a_0)$?

Dvije korisne formule

Što su faktorijeli i kako se interpretiraju?

Dvije korisne formule

Što su faktorijeli i kako se interpretiraju? Gama-funkcija je primjer neelementarne funkcije zadane integralom:

$$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Dvije korisne formule

Što su faktorijeli i kako se interpretiraju? Gama-funkcija je primjer neelementarne funkcije zadane integralom:

$$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-a\,x) \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},\ a > 0.$$

Dvije korisne formule

Što su faktorijeli i kako se interpretiraju? Gama-funkcija je primjer neelementarne funkcije zadane integralom:

$$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-a\,x) \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \ a > 0.$$

Postoje integrabiln funkcije čija antiderivacija nije elementarna funkcija, npr.

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) \, \mathrm{d}t.$$

Za $x = +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Teorem

- $0 \leq p(A) \leq 1$ *za sve događaje* A;
- *Ako s* A^c *označimo* *suprotni događaj* *od* A *(„nije se dogodio* A*"), vrijedi*

$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

Teorem

- $0 \leq p(A) \leq 1$ *za sve događaje* A;
- *Ako s* A^c *označimo* *suprotni događaj* *od* A *(„nije se dogodio* A*"), vrijedi*
$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

Očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost) kontinuirane slučajne varijable X zadane funkcijom gustoće φ:

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Teorem

- $0 \leq p(A) \leq 1$ *za sve događaje* A*;*
- *Ako s* A^c *označimo suprotni događaj od* A *(„nije se dogodio* A*"), vrijedi*

$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

Očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost) kontinuirane slučajne varijable X zadane funkcijom gustoće φ:

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Zadatak

Odredite očekivani (prosječni) polumjer vodikove 2s-orbitale. Je li to najvjerojatnija udaljenost vodikovog 2s-elektrona do jezgre? Je li jednaka točki globalnog maksimuma odgovarajuće radijalne funkcije gustoće vjerojatnosti? Kolika je vjerojatnost da vodikov 2s-elektron bude na udaljenosti između a_0 *i očekivane?*

Zadatak

Čestica u jednodimenzionalnoj kutiji je čestica koja se može gibati samo unutar segmenta $[0, a]$. *Pripadne valne funkcije dane su (za različite kvantne brojeve* $n \in \mathbb{N}_0$*) formulom*

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \le x \le a.$$

Skicirajte ih!
Dokažite da su valne funkcije čestice u jednodimenzionalnoj kutiji za različite kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}$ *međusobno ortogonalne, tj. da im je integral umnoška po cijeloj domeni* 0. *Izračunajte vjerojatnost* P *da se čestica kvantnog broja* n *nađe u srednjoj trećini kutije! Odredite konstante normiranja* A_n *i očekivanu vrijednost* $\langle x \rangle$ *položaja čestice za svaki* n.