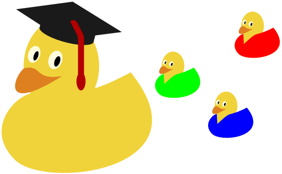
23. predavanje: Vektorski prostori geometrijskih vektora.

Franka Miriam Brückler



Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?

Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
- Kako se definira geometrijski vektor?

Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
- Kako se definira geometrijski vektor? Koji podaci su potrebni da se jednoznačno opiše geometrijski vektor?

Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
- Kako se definira geometrijski vektor? Koji podaci su potrebni da se jednoznačno opiše geometrijski vektor?
- Koji su elementi vektorskih prostora $V^2(O)$, $V^3(O)$, V^2, V^3?

Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
- Kako se definira geometrijski vektor? Koji podaci su potrebni da se jednoznačno opiše geometrijski vektor?
- Koji su elementi vektorskih prostora $V^2(O)$, $V^3(O)$, V^2, V^3?
- Kada dvije orijentirane dužine u pojedinom od tih prostora predstavljaju isti vektor?

Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
- Kako se definira geometrijski vektor? Koji podaci su potrebni da se jednoznačno opiše geometrijski vektor?
- Koji su elementi vektorskih prostora $V^2(O)$, $V^3(O)$, V^2, V^3?
- Kada dvije orijentirane dužine u pojedinom od tih prostora predstavljaju isti vektor?
- Što je nulvektor?

Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
- Kako se definira geometrijski vektor? Koji podaci su potrebni da se jednoznačno opiše geometrijski vektor?
- Koji su elementi vektorskih prostora $V^2(O)$, $V^3(O)$, V^2, V^3?
- Kada dvije orijentirane dužine u pojedinom od tih prostora predstavljaju isti vektor?
- Što je nulvektor? A suprotni vektor vektora $\vec{v}$?

Geometrijski vektori

- Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
- Kako se definira geometrijski vektor? Koji podaci su potrebni da se jednoznačno opiše geometrijski vektor?
- Koji su elementi vektorskih prostora $V^2(O)$, $V^3(O)$, V^2, V^3?
- Kada dvije orijentirane dužine u pojedinom od tih prostora predstavljaju isti vektor?
- Što je nulvektor? A suprotni vektor vektora $\vec{v}$?
- U koji uvjet ima smisla govoriti o jediničnim vektorima? Što su oni?

Množenje vektora skalarom

- U kontekstu geometrijskih vektora, izraz skalar znači što?

Množenje vektora skalarom

- U kontekstu geometrijskih vektora, izraz skalar znači što?
- Definirajte $2\vec{v}$ i $-\frac{1}{2}\vec{v}$.

Množenje vektora skalarom

- U kontekstu geometrijskih vektora, izraz skalar znači što?
- Definirajte $2\vec{v}$ i $-\frac{1}{2}\vec{v}$. Dajte opću definiciju množenja vektora skalarom!

Množenje vektora skalarom

- U kontekstu geometrijskih vektora, izraz skalar znači što?
- Definirajte $2\vec{v}$ i $-\frac{1}{2}\vec{v}$. Dajte opću definiciju množenja vektora skalarom!
- Možemo li vektor podijeliti skalarom? Ako da, kako?

Množenje vektora skalarom

- U kontekstu geometrijskih vektora, izraz skalar znači što?
- Definirajte $2\vec{v}$ i $-\frac{1}{2}\vec{v}$. Dajte opću definiciju množenja vektora skalarom!
- Možemo li vektor podijeliti skalarom? Ako da, kako?
- Formulom zapišite jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Množenje vektora skalarom

- U kontekstu geometrijskih vektora, izraz skalar znači što?
- Definirajte $2\vec{v}$ i $-\frac{1}{2}\vec{v}$. Dajte opću definiciju množenja vektora skalarom!
- Možemo li vektor podijeliti skalarom? Ako da, kako?
- Formulom zapišite jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao $\vec{a} \neq \vec{0}$.
- Ako promatramo vektore samo jednog smjera, pokažite da ih sve možemo jednoznačno opisati po jednim realnim brojem ako unaprijed fiksiramo jedan vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ tog smjera.

Množenje vektora skalarom

- U kontekstu geometrijskih vektora, izraz skalar znači što?
- Definirajte $2\vec{v}$ i $-\frac{1}{2}\vec{v}$. Dajte opću definiciju množenja vektora skalarom!
- Možemo li vektor podijeliti skalarom? Ako da, kako?
- Formulom zapišite jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao $\vec{a} \neq \vec{0}$.
- Ako promatramo vektore samo jednog smjera, pokažite da ih sve možemo jednoznačno opisati po jednim realnim brojem ako unaprijed fiksiramo jedan vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ tog smjera.
- Koji je sinonim za „biti istog smjera“?

Zbrajanje vektora

- Definirajte zbroj dva vektora. Je li definicija primjenjiva i na kolinearne vektore?

Zbrajanje vektora

- Definirajte zbroj dva vektora. Je li definicija primjenjiva i na kolinearne vektore?
- Definirajte razliku dva vektora.

Zbrajanje vektora

- Definirajte zbroj dva vektora. Je li definicija primjenjiva i na kolinearne vektore?
- Definirajte razliku dva vektora.
- Pokažite da se u V^2 i V^3 vektori mogu zbrajati i koristeći tzv. pravilo trokuta.

Zbrajanje vektora

- Definirajte zbroj dva vektora. Je li definicija primjenjiva i na kolinearne vektore?
- Definirajte razliku dva vektora.
- Pokažite da se u V^2 i V^3 vektori mogu zbrajati i koristeći tzv. pravilo trokuta.
- Koja su osnovna svojstva zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom? Razlikuju li se od osnovnih svojstava zbrajanja i množenja realnih brojeva?

Zbrajanje vektora

- Definirajte zbroj dva vektora. Je li definicija primjenjiva i na kolinearne vektore?
- Definirajte razliku dva vektora.
- Pokažite da se u V^2 i V^3 vektori mogu zbrajati i koristeći tzv. pravilo trokuta.
- Koja su osnovna svojstva zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom? Razlikuju li se od osnovnih svojstava zbrajanja i množenja realnih brojeva?

Primjer

Centar mase sustava od N masa m_i s radij-vektorima $\vec{r}_i$ (u odnosu na istu točku O) ima radij-vektor

$$\vec{R} = \frac{1}{\sum_j m_j} \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Baze i koordinate u ravnini

- Skicirajte dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa zajedničkim početkom O. Pokažite da se svaki drugi vektor njihove ravnine može zapisati kao $x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$ s jednoznačno određenim $x, y \in \mathbb{R}$.

Baze i koordinate u ravnini

- Skicirajte dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa zajedničkim početkom O. Pokažite da se svaki drugi vektor njihove ravnine može zapisati kao $x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$ s jednoznačno određenim $x, y \in \mathbb{R}$.
- Definirajte pojam baza prostora V^2 odnosno $V^2(O)$.

Baze i koordinate u ravnini

- Skicirajte dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa zajedničkim početkom O. Pokažite da se svaki drugi vektor njihove ravnine može zapisati kao $x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$ s jednoznačno određenim $x, y \in \mathbb{R}$.
- Definirajte pojam baza prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Što su to koordinate vektora s obzirom na danu bazu?

Baze i koordinate u ravnini

- Skicirajte dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa zajedničkim početkom O. Pokažite da se svaki drugi vektor njihove ravnine može zapisati kao $x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$ s jednoznačno određenim $x, y \in \mathbb{R}$.
- Definirajte pojam baza prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Što su to koordinate vektora s obzirom na danu bazu? Skicirajte vektor koji ima koordinate $[-1, 3]$ s obzirom na bazu iz prve točke ovog slidea.
- Koje su koordinate vektora baze s obzirom na tu istu bazu?

Baze i koordinate u ravnini

- Skicirajte dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa zajedničkim početkom O. Pokažite da se svaki drugi vektor njihove ravnine može zapisati kao $x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$ s jednoznačno određenim $x, y \in \mathbb{R}$.
- Definirajte pojam baza prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Što su to koordinate vektora s obzirom na danu bazu? Skicirajte vektor koji ima koordinate $[-1, 3]$ s obzirom na bazu iz prve točke ovog slidea.
- Koje su koordinate vektora baze s obzirom na tu istu bazu?
- Pokažite primjerom da isti vektor može imati različite koordinate s obzirom na dvije različite baze.

Baze i koordinate u prostoru

- Definirajte pojam komplanarnosti triju ili više vektora. Zašto se pojam ne definira za dva vektora?

Baze i koordinate u prostoru

- Definirajte pojam komplanarnosti triju ili više vektora. Zašto se pojam ne definira za dva vektora?
- Definirajte bazu i koordinate u V^3 i $V^3(O)$.

Baze i koordinate u prostoru

- Definirajte pojam komplanarnosti triju ili više vektora. Zašto se pojam ne definira za dva vektora?
- Definirajte bazu i koordinate u V^3 i $V^3(O)$.
- Ako neki vektor u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\{\vec{b}, -\vec{a}, 2\vec{c}\}$?

Baze i koordinate u prostoru

- Definirajte pojam komplanarnosti triju ili više vektora. Zašto se pojam ne definira za dva vektora?
- Definirajte bazu i koordinate u V^3 i $V^3(O)$.
- Ako neki vektor u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\{\vec{b}, -\vec{a}, 2\vec{c}\}$?
- Moraju li vektori baze biti međusobno okomiti? A jedinični?

Baze i koordinate u prostoru

- Definirajte pojam komplanarnosti triju ili više vektora. Zašto se pojam ne definira za dva vektora?
- Definirajte bazu i koordinate u V^3 i $V^3(O)$.
- Ako neki vektor u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\{\vec{b}, -\vec{a}, 2\vec{c}\}$?
- Moraju li vektori baze biti međusobno okomiti? A jedinični? Definirajte ortogonalne i ortonormirane baze u četiri vektorska prostora geometrijskih vektora.

Zadatak

Ako su dva vektora zadana koordinatama obzirom na istu bazu, kako ćemo po koordinatama prepoznati da su kolinearni?

Baze i koordinate u prostoru

- Definirajte pojam komplanarnosti triju ili više vektora. Zašto se pojam ne definira za dva vektora?
- Definirajte bazu i koordinate u V^3 i $V^3(O)$.
- Ako neki vektor u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\{\vec{b}, -\vec{a}, 2\vec{c}\}$?
- Moraju li vektori baze biti međusobno okomiti? A jedinični? Definirajte ortogonalne i ortonormirane baze u četiri vektorska prostora geometrijskih vektora.

Zadatak

Ako su dva vektora zadana koordinatama obzirom na istu bazu, kako ćemo po koordinatama prepoznati da su kolinearni? Izvedite formule za koordinatno zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom!

Baze i koordinate u prostoru

- Definirajte pojam komplanarnosti triju ili više vektora. Zašto se pojam ne definira za dva vektora?
- Definirajte bazu i koordinate u V^3 i $V^3(O)$.
- Ako neki vektor u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\{\vec{b}, -\vec{a}, 2\vec{c}\}$?
- Moraju li vektori baze biti međusobno okomiti? A jedinični? Definirajte ortogonalne i ortonormirane baze u četiri vektorska prostora geometrijskih vektora.

Zadatak

Ako su dva vektora zadana koordinatama obzirom na istu bazu, kako ćemo po koordinatama prepoznati da su kolinearni? Izvedite formule za koordinatno zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom! Za $\overrightarrow{v} = [1, 2, 0]$ *i* $\overrightarrow{w} = [-5, 1, 1]$ *izračunajte* $\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w}$.

- Definirajte koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru i koordinate točaka.

- Definirajte koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru i koordinate točaka. Kada koordinatni sustav nazivamo Kartezijevim?

- Definirajte koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru i koordinate točaka. Kada koordinatni sustav nazivamo Kartezijevim?
- Odredite koordinate vektora koji počinje u točki $(4, -2, 1)$, a završava u točki $(1, 0, -3)$.

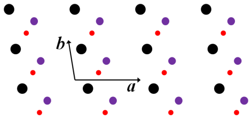
- Definirajte koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru i koordinate točaka. Kada koordinatni sustav nazivamo Kartezijevim?
- Odredite koordinate vektora koji počinje u točki $(4, -2, 1)$, a završava u točki $(1, 0, -3)$.
- Definirajte (primitivnu) vektorsku odnosno točkovnu rešetku s obzirom na danu bazu ravnine odnosno prostora.

- Definirajte koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru i koordinate točaka. Kada koordinatni sustav nazivamo Kartezijevim?
- Odredite koordinate vektora koji počinje u točki $(4, -2, 1)$, a završava u točki $(1, 0, -3)$.
- Definirajte (primitivnu) vektorsku odnosno točkovnu rešetku s obzirom na danu bazu ravnine odnosno prostora.
- Što su to translacije?

- Definirajte koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru i koordinate točaka. Kada koordinatni sustav nazivamo Kartezijevim?
- Odredite koordinate vektora koji počinje u točki $(4, -2, 1)$, a završava u točki $(1, 0, -3)$.
- Definirajte (primitivnu) vektorsku odnosno točkovnu rešetku s obzirom na danu bazu ravnine odnosno prostora.
- Što su to translacije? Kada je objekt translacijski simetričan?

- Definirajte koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru i koordinate točaka. Kada koordinatni sustav nazivamo Kartezijevim?
- Odredite koordinate vektora koji počinje u točki $(4, -2, 1)$, a završava u točki $(1, 0, -3)$.
- Definirajte (primitivnu) vektorsku odnosno točkovnu rešetku s obzirom na danu bazu ravnine odnosno prostora.
- Što su to translacije? Kada je objekt translacijski simetričan? Periodičan u ravnini odnosno prostoru?

Ako je objekt u ravnini odnosno prostoru periodičan, uz njega se odabirom dva odnosno tri vektora koji opisuju dvije nekolinearne odnosno nekomplanarne translacijske simetrije prirodno veže primitivna rešetka.



Periodičnost unutrašnje građe kristala znači da se među njenim simetrijama nalaze i translacije u tri nekomplanarna smjera. Odaberemo li tri odgovarajuća vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, oni čine bazu prostora. Tako odabranu bazu nazivamo kristalografskom bazom, a uz odabri ishodišta pripadnu rešetku zovemo (primitivnom) kristalnom rešetkom. Kristalografska se baza obično opisuje kristalografskim parametrima, tj. duljinama vektora baze (a, b, c) i kutovima među njima ($\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$).