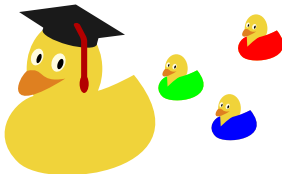


23. predavanje: Polarne koordinate u ravnini.

Franka Miriam Brückler



Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo jednoznačno opisati pomoću para realnih brojeva?

Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo jednoznačno opisati pomoću para realnih brojeva?
- Polarne koordinate točke u ravnini r (polarna udaljenost) i φ (polarni kut) odgovaraju apsolutnoj vrijednosti i argumentu kompleksnog broja koji odgovara toj točki. Koji su mogući iznosi polarnih koordinata?

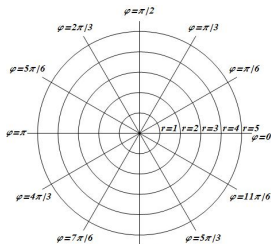
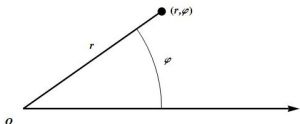
Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo jednoznačno opisati pomoću para realnih brojeva?
- Polarne koordinate točke u ravnini r (polarna udaljenost) i φ (polarni kut) odgovaraju apsolutnoj vrijednosti i argumentu kompleksnog broja koji odgovara toj točki. Koji su mogući iznosi polarnih koordinata?
- Što u polarnom koordinatnom sustavu predstavljaju jednadžbe $r = 3$ i $\varphi = 1$? Usporedite s interpretacijom jednadžbi $x = 3$ i $y = 1$ u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Polarne koordinate u ravnini

- Na koja dva načina kompleksan broj možemo jednoznačno opisati pomoću para realnih brojeva?
- Polarne koordinate točke u ravnini r (polarna udaljenost) i φ (polarni kut) odgovaraju apsolutnoj vrijednosti i argumentu kompleksnog broja koji odgovara toj točki. Koji su mogući iznosi polarnih koordinata?
- Što u polarnom koordinatnom sustavu predstavljaju jednadžbe $r = 3$ i $\varphi = 1$? Usporedite s interpretacijom jednadžbi $x = 3$ i $y = 1$ u pravokutnom koordinatnom sustavu.

$$(r, \varphi); r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$



- Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama $(r, \varphi) = (0, 0)$? $(1, 0)$? $(0, 1)$? $(-1, 0)$? $(1, \pi/2)$, $(2, \pi/3)$? $(1, -\pi/3)$? $(\pi, 45^\circ)$?

- Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama $(r, \varphi) = (0, 0)$? $(1, 0)$? $(0, 1)$? $(-1, 0)$? $(1, \pi/2)$, $(2, \pi/3)$? $(1, -\pi/3)$? $(\pi, 45^\circ)$?
- Šrafirajte dio ravnine koji u polarnom koordinatnom sustavu ima obje koordinate između 0 i 1.

- Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama $(r, \varphi) = (0, 0)$? $(1, 0)$? $(0, 1)$? $(-1, 0)$? $(1, \pi/2)$, $(2, \pi/3)$? $(1, -\pi/3)$? $(\pi, 45^\circ)$?
- Šrafirajte dio ravnine koji u polarnom koordinatnom sustavu ima obje koordinate između 0 i 1.

Uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i polarne osi koja se poklapa s pozitivnim dijelom osi apscisa, **veza između Kartezijevih i polarnih koordinata** točke u ravnini opisana je s:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Koje su polarne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-2, 2)$?

Polarne jednadžbe krivulja u ravnini

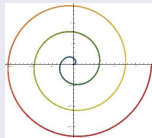
Primjer

Zadan je polupravac o s početkom u ishodištu O . Točka se od O jednoliko giba po o , a pritom o jednoliko rotira oko O , dakle je u svakom trenutku

Polarne jednadžbe krivulja u ravnini 🎓

Primjer

Zadan je polupravac o s početkom u ishodištu O . Točka se od O jednoliko giba po o , a pritom o jednoliko rotira oko O , dakle je u svakom trenutku $r = a\varphi$. To je jednadžba **Arhimedove spirale**. Objasnite zašto ju možemo shvatiti kao graf linearne funkcije ograničene na pozitivne brojeve!



Zadatak

Skicirajte nekoliko točaka hiperboličke spirale zadane jednadžbom $r = 1/\varphi$. Možete li naslutiti njen oblik?

$$r = f(\varphi)$$

$$r = f(\varphi)$$

- $r \geq 0$

$$r = f(\varphi)$$

- $r \geq 0$
- **periodičnost**: ako je neki višekratnik od 2π period od f , krivulja je zatvorena, ako je temeljni period $2\pi/n$, krivulja posjeduje rotacijsku simetriju reda n

$$r = f(\varphi)$$

- $r \geq 0$
- **periodičnost**: ako je neki višekratnik od 2π period od f , krivulja je zatvorena, ako je temeljni period $2\pi/n$, krivulja posjeduje rotacijsku simetriju reda n
- **parnost**: ako je f parna, krivulja je simetrična s obzirom na polarnu os

$$r = f(\varphi)$$

- $r \geq 0$
- **periodičnost**: ako je neki višekratnik od 2π period od f , krivulja je zatvorena, ako je temeljni period $2\pi/n$, krivulja posjeduje rotacijsku simetriju reda n
- **parnost**: ako je f parna, krivulja je simetrična s obzirom na polarnu os
- **ograničenost**: ako je $f(\varphi) \leq M$ za sve φ (za koje je $r \geq 0$), krivulja je unutar kružnice $r = M$, a ako je ako je $f(\varphi) \geq m > 0$ za sve φ , krivulja je izvan kružnice $r = m$

$$r = f(\varphi)$$

- $r \geq 0$
- **periodičnost**: ako je neki višekratnik od 2π period od f , krivulja je zatvorena, ako je temeljni period $2\pi/n$, krivulja posjeduje rotacijsku simetriju reda n
- **parnost**: ako je f parna, krivulja je simetrična s obzirom na polarnu os
- **ograničenost**: ako je $f(\varphi) \leq M$ za sve φ (za koje je $r \geq 0$), krivulja je unutar kružnice $r = M$, a ako je ako je $f(\varphi) \geq m > 0$ za sve φ , krivulja je izvan kružnice $r = m$

Zadatak

Što možete zaključiti o izgledu krivulje $r = f(\varphi)$ ako je f neparna?

$$r = f(\varphi)$$

- $r \geq 0$
- **periodičnost**: ako je neki višekratnik od 2π period od f , krivulja je zatvorena, ako je temeljni period $2\pi/n$, krivulja posjeduje rotacijsku simetriju reda n
- **parnost**: ako je f parna, krivulja je simetrična s obzirom na polarnu os
- **ograničenost**: ako je $f(\varphi) \leq M$ za sve φ (za koje je $r \geq 0$), krivulja je unutar kružnice $r = M$, a ako je ako je $f(\varphi) \geq m > 0$ za sve φ , krivulja je izvan kružnice $r = m$

Zadatak

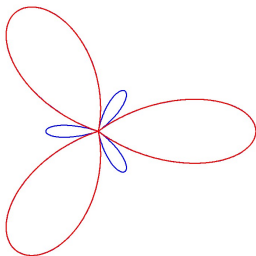
Što možete zaključiti o izgledu krivulje $r = f(\varphi)$ ako je f neparna? Ni za koju točku krivulje njoj zrcalno simetrična točka (s obzirom na polarnu os) nije na krivulji.

Zadatak

Skicirajte krivulje koja imaju polarne jednadžbe $r = f(\varphi)$ i $r = |f(\varphi)|$ za $f(\varphi) = 1 + 2 \cos 3\varphi$

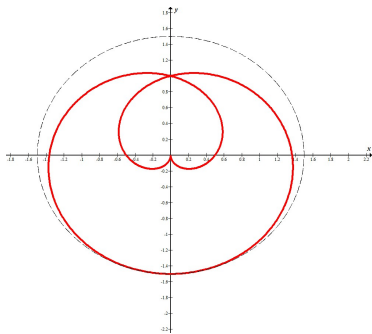
Zadatak

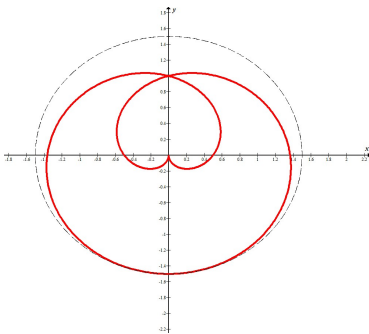
Skicirajte krivulje koja imaju polarne jednadžbe $r = f(\varphi)$ i $r = |f(\varphi)|$ za $f(\varphi) = 1 + 2 \cos 3\varphi$



Zadatak

Što možete zaključiti o funkciji f ako znate da je $r = f(\varphi)$ jednadžba sljedeće krivulje u polarnim koordinatama?





Koeficijent smjera tangente na krivulju $r = f(\varphi)$:

$$k = \frac{r_0 + r'(\varphi_0) \operatorname{tg} \varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0 \operatorname{tg} \varphi_0}.$$

Zadatak

Koji je koeficijent smjera tangente na Arhimedovu spiralnu s parametrom $a = 5$ u njenoj točki određenoj polarnim kutom 60° .