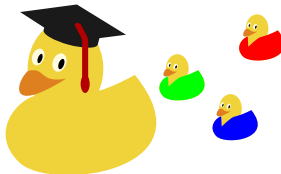


24. predavanje: Klasična algebra vektora.

Franka Miriam Brückler



Skalarni produkt

Kako odrediti iznos vektora kojem znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako odrediti kut između dva vektora kojima znamo koordinate s obzirom na neku bazu?

Skalarni produkt

Kako odrediti iznos vektora kojem znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako odrediti kut između dva vektora kojima znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako definiramo kut između dva vektora?

Skalarni produkt

Kako odrediti iznos vektora kojem znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako odrediti kut između dva vektora kojima znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako definiramo kut između dva vektora?

Definicija (Skalarni produkt)

Skalarni produkt dva geometrijska $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vektora definiran je s

Skalarni produkt

Kako odrediti iznos vektora kojem znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako odrediti kut između dva vektora kojima znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako definiramo kut između dva vektora?

Definicija (Skalarni produkt)

Skalarni produkt dva geometrijska $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vektora definiran je s

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v w \cos \varphi,$$

gdje je φ kut kojeg zatvaraju vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

Skalarni produkt

Kako odrediti iznos vektora kojem znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako odrediti kut između dva vektora kojima znamo koordinate s obzirom na neku bazu? Kako definiramo kut između dva vektora?

Definicija (Skalarni produkt)

Skalarni produkt dva geometrijska $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vektora definiran je s

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v w \cos \varphi,$$

gdje je φ kut kojeg zatvaraju vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}; \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v},$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (x\vec{v}) \cdot \vec{w} = x(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}.$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora?

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}.$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora? Neka je fiksirana baza: Znamo a, b (i c) te ($\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c}), \beta = \angle(\vec{a}, \vec{c}), \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$).

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}.$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora? Neka je fiksirana baza: Znamo a, b (i c) te ($\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c}), \beta = \angle(\vec{a}, \vec{c}), \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$).

Zadatak

Izvedite formulu za skalarni produkt iznos vektora prostora V^3 zadanog koordinatama s obzirom na ortogonalnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}.$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora? Neka je fiksirana baza: Znamo a, b (i c) te $(\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c}), \beta = \angle(\vec{a}, \vec{c}), \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b}))$.

Zadatak

Izvedite formulu za skalarni produkt iznos vektora prostora V^3 zadanog koordinatama s obzirom na ortogonalnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Zadatak

Neka je $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte $\angle(\vec{p}, \vec{q})$ za $\vec{p} = [3, -1]$ i $\vec{q} = [2, 1]$.

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost ako znate da su parametri kristalografske baze $a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$.

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost ako znate da su parametri kristalografske baze $a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$.

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan,

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost ako znate da su parametri kristalografske baze $a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$.

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost ako znate da su parametri kristalografske baze $a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$.

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

Primjer

U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina 1 m, 2 m i 3 m, vektori $[-4, 1, 0]$ i $[1, 1, 0]$ su međusobno okomiti, ali da je baza bila ortonormirana, ta dva vektora ne bi bila okomita.

Zadatak

Koji kut trebaju zatvarati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baze prostora V^2 ako znate da je $a = b$ i da su vektori koji obzirom na tu bazu imaju koordinate $[-2, 1]$ i $[0, 3]$ okomiti?

Zadatak

Za kristale kubičnog sustava kristalografsku bazu možemo smatrati ortonormiranom.^a Ako su u jediničnoj ćeliji tri atoma na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$, $B = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0)$, $C = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ te ako su atomi vezani tako da je C vezan s A i B , odredite kut veze $\varphi = \angle ACB$! (Rješenje: $\varphi = 108^\circ 25'$).

Riješite isti zadatak ako se radi o kristalu rompskog sustava s bridovima jedinične ćelije duljina redom 300 pm, 500 pm, 800 pm?

^aDuljinu brida a jedinične ćelije proglasimo jediničnom duljinom.

Napomena

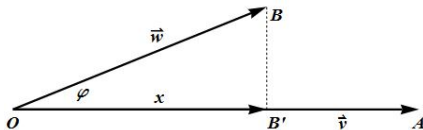
Vrijedi $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| |\vec{w}|$.

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ pri pomaku $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ je

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos \theta.$$



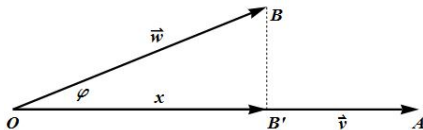
$$x = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|}, \quad \vec{OB'} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ pri pomaku $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ je

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos \theta.$$



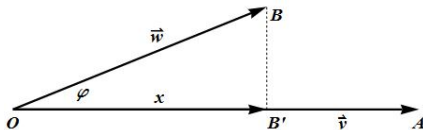
$$x = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|}, \quad \vec{OB'} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ pri pomaku $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ je

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos \theta.$$



$$x = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|}, \quad \vec{OB'} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Zadatak

Ako su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dva vektora, što predstavlja iznos $v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito?

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Definicija (Vektorski produkt)

Vektorski produkt dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Definicija (Vektorski produkt)

Vektorski produkt dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ koji je

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Definicija (Vektorski produkt)

Vektorski produkt dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ koji je okomit na oba vektora, iznos od $\vec{v} \times \vec{w}$ je $v \cdot w \cdot \sin \varphi$, tj. jednaka je površini paralelograma razapetog s $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a orijentiran je tako da $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{v} \times \vec{w}$ poštuju pravilo desne ruke.

Primjer

Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, a kutni moment mase m oko točke je $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, gdje je $\vec{p} = m\vec{v}$ linearni momoment.

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Primjer

Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, a kutni moment mase m oko točke je $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, gdje je $\vec{p} = m\vec{v}$ linearni momoment.

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -\pi \vec{v}$, koliko je $\vec{v} \times \vec{w}$?

Zadatak

Uz koji uvjet vektori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ čine bazu prostora V^3 ?

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$,

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$, ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$, ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i antikomutativnost $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$, ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i antikomutativnost $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$. Vrijedi i

$$\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0},$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v},$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = v^2 w^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$$

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom.

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre.

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre. Stoga, ako znamo iz koordinata vrhova izračunati volumen paralelepipeda, znamo izračunati volumen svakog uglatog tijela. Operacija kojom dobivamo volumen paralelepipeda razapetog s tri vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je, do na predznak, mješoviti produkt tih vektora:

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|.$$

Definicija (Mješoviti produkt)

Mješoviti produkt triju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je skalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Ako je mješoviti produkt tri vektora nula, oni su

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre. Stoga, ako znamo iz koordinata vrhova izračunati volumen paralelepipeda, znamo izračunati volumen svakog uglatog tijela. Operacija kojom dobivamo volumen paralelepipeda razapetog s tri vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je, do na predznak, mješoviti produkt tih vektora:

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|.$$

Definicija (Mješoviti produkt)

Mješoviti produkt triju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je skalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Ako je mješoviti produkt tri vektora nula, oni su komplanarni.

Ako je $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) > 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ čine tzv. **desnu bazu**, a u suprotnom tzv. lijevu bazu.

Primjer

Volumen jedinične ćelije je za sve kristalne sustave dan formulom

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

(za kristalografsku bazu se podrazumijeva da je desna).

Primjer

Volumen jedinične ćelije je za sve kristalne sustave dan formulom

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

(za kristalografsku bazu se podrazumijeva da je desna).

Vrijedi tzv. ciklička invarijantnost mješovitog produkta:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}).$$

Zadatak

Neka je $\vec{a} \neq \vec{0}$. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{a}$ i $\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{a}$.

Recipročna baza

Kako izračunati $\vec{v} \times \vec{w}$ ili $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ako su poznate koordinate od $(\vec{u},) \vec{v}$ i $\vec{w}$?

Recipročna baza

Kako izračunati $\vec{v} \times \vec{w}$ ili $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ako su poznate koordinate od $(\vec{u},)$ $\vec{v}$ i $\vec{w}$?

Definicija

Za odabranu desnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, pripadna recipročna (dualna) baza definirana je s

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}^* = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}, \vec{c}^* = \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b},$$

gdje je $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Zadatak

Koliko iznosi $\vec{a}^* \cdot \vec{b}$? A $\vec{b}^* \cdot \vec{b}$?

Zadatak

Koliko iznosi $\vec{a}^* \cdot \vec{b}$? A $\vec{b}^* \cdot \vec{b}$?

Vektori $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ imaju sljedeća svojstva:

$$\vec{a}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{b} = \vec{c}^* \cdot \vec{c} = 1,$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = \vec{a}^* \cdot \vec{c} = \vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{c} = \vec{c}^* \cdot \vec{a} = \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0.$$

Zadatak

Ako je kristalografska baza ortogonalna, kakva je odgovarajuća baza recipročnog prostora? A ako je ortonormirana?

$$\{\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

Napomena

Prostor koordinatiziran kristalografskom bazom nazivamo direktnim prostorom, a ako je koordinatiziran pripadnom recipročnom bazom, recipročnim prostorom.

Zadatak

Izračunajte volumen V^ jedinične ćelije u recipročnom prostoru!*

Zadatak

Izračunajte volumen V^ jedinične ćelije u recipročnom prostoru!*

Primijetimo da smo tako dokazali i da ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza, onda je i $(\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$ desna baza.

Zadatak

Izračunajte volumen V^ jedinične ćelije u recipročnom prostoru!*

Primijetimo da smo tako dokazali i da ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza, onda je i $(\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$ desna baza.

Zadatak

Dokažite da je recipročna baza recipročne baze je direktna (polazna) baza.

Zadatak

Izračunajte volumen V^ jedinične ćelije u recipročnom prostoru!*

Primijetimo da smo tako dokazali i da ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza, onda je i $(\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$ desna baza.

Zadatak

Dokažite da je recipročna baza recipročne baze je direktna (polazna) baza.

Zadatak

Izvedite formulu za skalarni produkt dva vektora od kojih su jednome poznate koordinate u direktnoj, a drugom u recipročnoj bazi!

Ako je $\vec{v} = [x, y, z]$ i $\vec{w} = [x', y', z']$ (s obzirom na istu direktnu bazu), onda je

$$\vec{v} \times \vec{w} = V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - z'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) =$$

$$= V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Ako je $\vec{v} = [x, y, z]$ i $\vec{w} = [x', y', z']$ (s obzirom na istu direktnu bazu), onda je

$$\vec{v} \times \vec{w} = V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - z'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) =$$

$$= V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Zadatak

Neka je $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ i $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Bez korištenja gornje formule izračunajte $[1, 1, 0] \times [1, 0, 1]$.

Zadatak

Kolika je površina trokuta čiji vrhovi u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu (s jedinicom duljine 1 cm) imaju koordinate $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$ i $(3, 6, 4)$? A volumen tetraedra kojemu je taj trokut osnovica i četvrti vrh $(-1, -1, -1)$?

Zadatak

Kolika je površina trokuta čiji vrhovi u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu (s jedinicom duljine 1 cm) imaju koordinate $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$ i $(3, 6, 4)$? A volumen tetraedra kojemu je taj trokut osnovica i četvrti vrh $(-1, -1, -1)$?

Zadatak

Magnezij kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu. ($a = b = 3,21 \text{ Å}$, $c = 5,21 \text{ Å}$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$). Ako uzmemo da je veza matematičkih s uobičajenim kristalografskim oznakama za heksagonski sustav dana s $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{a}_2$, koje su koordinate vektora $\vec{a}_3$ obzirom na $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$? Izračunajte $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$.

Zadatak

Kolika je površina trokuta čiji vrhovi u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu (s jedinicom duljine 1 cm) imaju koordinate $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$ i $(3, 6, 4)$? A volumen tetraedra kojemu je taj trokut osnovica i četvrti vrh $(-1, -1, -1)$?

Zadatak

Magnezij kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu. ($a = b = 3,21 \text{ Å}$, $c = 5,21 \text{ Å}$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$). Ako uzmemo da je veza matematičkih s uobičajenim kristalografskim oznakama za heksagonski sustav dana s $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{a}_2$, koje su koordinate vektora $\vec{a}_3$ obzirom na $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$? Izračunajte $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = V \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$