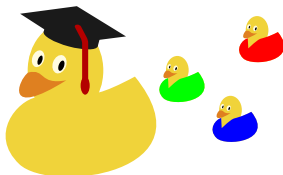


24. predavanje: Uvod u klasičnu algebru vektora i analitičku geometriju prostora.

Franka Miriam Brückler



Skalari i (geometrijski) vektori

Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?

Skalari i (geometrijski) vektori

Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
U kontekstu računa s vektorima, izraz **skalari** koristi se kao sinonim za riječ brojevi s kojima množimo vektore. U klasičnoj algebri vektora, tj. algebri s geometrijskim vektorima, skalari su uvijek realni brojevi.

Skalari i (geometrijski) vektori

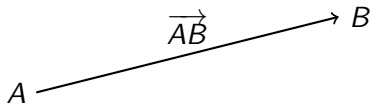
Koja je razlika između skalarnih i vektorskih fizikalnih veličina?
U kontekstu računa s vektorima, izraz **skalari** koristi se kao sinonim za riječ brojevi s kojima množimo vektore. U klasičnoj algebri vektora, tj. algebri s geometrijskim vektorima, skalari su uvijek realni brojevi.

Geometrijski vektori su objekti koji imaju iznos (duljinu), smjer (pravac) i orijentaciju (smjer). Preciznije, to su elementi nekog od vektorskih prostora $V^2(O)$, $V^3(O)$, V^2 ili V^3 .)

Orientirane dužine; vektorski prostori $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Definicija

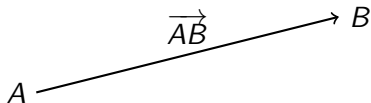
Orientirana dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina kojoj je definirano koja od dvije rubne točke je početak (A), a koja kraj (B).



Orientirane dužine; vektorski prostori $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Definicija

Orientirana dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina kojoj je definirano koja od dvije rubne točke je početak (A), a koja kraj (B).

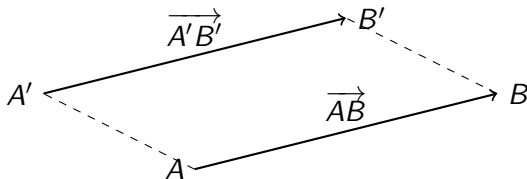


Pri rješavanju problema vezanih za geometrijske vektore uobičajeno je fiksirati jednu referentnu točku O koju nazivamo **ishodištem**.

Skup svih radij-vektora, tj. skup svih orijentiranih dužina kojima je početak O , označavamo s $V^2(O)$ odnosno s $V^3(O)$, ovisno o tome gledamo li dužine samo u jednoj ravnini ili u čitavom prostoru.

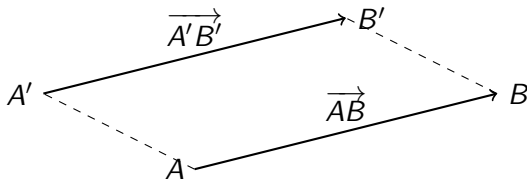
Vektorski prostori V^2 i V^3

Ukoliko je pak potrebno dozvoliti razmatranje orijentiranih dužina s različitim počecima, onda uzimamo da sve orijentirane dužine koje se mogu dobiti translacijom jedne orijentirane dužine predstavljaju isti vektor $\vec{v}$ (a svaka od tih orijentiranih dužina je jedan njegov reprezentant). Tada govorimo o prostoru V^2 odnosno V^3 .



Vektorski prostori V^2 i V^3

Ukoliko je pak potrebno dozvoliti razmatranje orijentiranih dužina s različitim počecima, onda uzimamo da sve orijentirane dužine koje se mogu dobiti translacijom jedne orijentirane dužine predstavljaju isti vektor $\vec{v}$ (a svaka od tih orijentiranih dužina je jedan njegov reprezentant). Tada govorimo o prostoru V^2 odnosno V^3 .



Koliko reprezentanata ima jedan vektor u $V^2(O)$ i $V^3(O)$?

Geometrijski vektori

Elemente prostorâ $V^2(O)$, V^2 , V^3 i $V^3(O)$ zovemo **geometrijskim vektorima**. Svaki od njih jednoznačno je određen s tri osobine: iznos (duljina), smjer (pravac) i orijentacija (smjer).

Duljina dužine koja je reprezentant vektora $\vec{v}$ zove se **iznos (duljina) vektora** $\vec{v}$ i označava s $|\vec{v}|$ ili jednostavno s v . Ukoliko naši geometrijski vektori predstavljaju veličine čija fizikalna dimenzija nije duljina (npr. sile, brzine, ...), podrazumijeva se da su duljine geometrijskih vektora kojima ih prikazujemo razmjerne njihovim iznosima.

Geometrijski vektori

Elemente prostorâ $V^2(O)$, V^2 , V^3 i $V^3(O)$ zovemo **geometrijskim vektorima**. Svaki od njih jednoznačno je određen s tri osobine: iznos (duljina), smjer (pravac) i orijentacija (smjer).

Duljina dužine koja je reprezentant vektora $\vec{v}$ zove se **iznos (duljina) vektora** $\vec{v}$ i označava s $|\vec{v}|$ ili jednostavno s v . Ukoliko naši geometrijski vektori predstavljaju veličine čija fizikalna dimenzija nije duljina (npr. sile, brzine, ...), podrazumijeva se da su duljine geometrijskih vektora kojima ih prikazujemo razmjerne njihovim iznosima. Vektor iznosa 0, tj. vektora kojemu se za svaki reprezentant podudaraju početak i kraj, naziva se **nulvektor**, oznaka $\vec{0}$.

Geometrijski vektori

Elemente prostorâ $V^2(O)$, V^2 , V^3 i $V^3(O)$ zovemo **geometrijskim vektorima**. Svaki od njih jednoznačno je određen s tri osobine: iznos (duljina), smjer (pravac) i orijentacija (smjer).

Duljina dužine koja je reprezentant vektora $\vec{v}$ zove se **iznos (duljina) vektora** $\vec{v}$ i označava s $|\vec{v}|$ ili jednostavno s v . Ukoliko naši geometrijski vektori predstavljaju veličine čija fizikalna dimenzija nije duljina (npr. sile, brzine, ...), podrazumijeva se da su duljine geometrijskih vektora kojima ih prikazujemo razmjerne njihovim iznosima. Vektor iznosa 0, tj. vektora kojemu se za svaki reprezentant podudaraju početak i kraj, naziva se **nulvektor**, oznaka $\vec{0}$.

Ponekad se govori o jediničnim vektorima. Ako smo mjernu jedinicu iznosa razmatranih vektora poistovjetili s brojem 1, tj. kojima su stvarni iznosi podijeljeni s mjernom jedinicom, onda sve vektore kojima je iznos 1 zovemo **jediničnim vektorima**.

Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti **smjer**, odnosno da su **kolinearni**.

Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti **smjer**, odnosno da su **kolinearni**.

Ako za dva kolinearna vektora odaberemo reprezentante $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O , kažemo da ta dva vektora imaju istu **orijentaciju** ako su točke A i B s iste strane točke O , a ako je O između A i B kažemo da imaju suprotnu orijentaciju.

Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti **smjer**, odnosno da su **kolinearni**.

Ako za dva kolinearna vektora odaberemo reprezentante $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O , kažemo da ta dva vektora imaju istu **orijentaciju** ako su točke A i B s iste strane točke O , a ako je O između A i B kažemo da imaju suprotnu orijentaciju.

Za nulvektor se uzima da je istog smjera i iste orijentacije kao bilo koji drugi vektor.

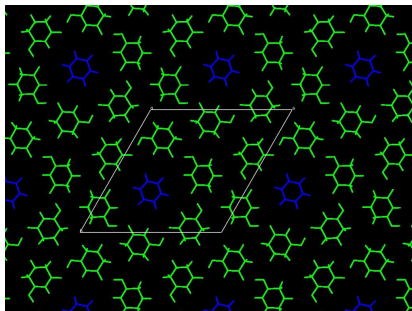
Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti **smjer**, odnosno da su **kolinearni**.

Ako za dva kolinearna vektora odaberemo reprezentante $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O , kažemo da ta dva vektora imaju istu **orijentaciju** ako su točke A i B s iste strane točke O , a ako je O između A i B kažemo da imaju suprotnu orijentaciju.

Za nulvektor se uzima da je istog smjera i iste orijentacije kao bilo koji drugi vektor.

Za dani vektor $\vec{v}$ se s $-\vec{v}$ označava vektor istog iznosa i smjera, ali suprotne orijentacije (**suprotni vektor**).

Pomoću geometrijskih vektora se uz mnoge fizikalne probleme mogu rješavati i problemi određivanja razmaka (duljine dužine), kutova dvaju pravaca, površine (paralelograma, trokuta, ...) ili pak volumena (paralelepipeda, piramide, ...) iz poznavanja koordinata točaka koje određuju vrhove promatranog objekta. Pomoću geometrijskih vektora i njihovih koordinata se također opisuju kristalne strukture i simetrijske operacije.



Pravo je stoga prvo pitanje: Što su to koordinate?

Množenje vektora skalarom

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su prije svega karakterizirani dvjema algebarskim operacijama, a to su zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

Definicija množenja vektora skalarom

Umnožak vektora sa skalarom daje vektor

Množenje vektora skalarom

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su prije svega karakterizirani dvjema algebarskim operacijama, a to su zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

Definicija množenja vektora skalarom

Umnožak vektora sa skalarom daje vektor istog smjera, tako da:

- ako je $\vec{v}$ vektor i x skalar, onda je duljina vektora $x\vec{v}$ jednaka

Množenje vektora skalarom

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su prije svega karakterizirani dvjema algebarskim operacijama, a to su zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

Definicija množenja vektora skalarom

Umnožak vektora sa skalarom daje vektor istog smjera, tako da:

- ako je $\vec{v}$ vektor i x skalar, onda je duljina vektora $x\vec{v}$ jednaka $|x| \cdot |\vec{v}|$ i
- ako je $\vec{v}$ vektor i $x > 0$ skalar, onda $x\vec{v}$ ima

Množenje vektora skalarom

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su prije svega karakterizirani dvjema algebarskim operacijama, a to su zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

Definicija množenja vektora skalarom

Umnožak vektora sa skalarom daje vektor istog smjera, tako da:

- ako je $\vec{v}$ vektor i x skalar, onda je duljina vektora $x\vec{v}$ jednaka $|x| \cdot |\vec{v}|$ i
- ako je $\vec{v}$ vektor i $x > 0$ skalar, onda $x\vec{v}$ ima istu orijentaciju kao $\vec{v}$, a ako je $x < 0$ skalar, onda $x\vec{v}$ ima suprotnu orijentaciju od $\vec{v}$.

Množenje vektora skalarom

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su prije svega karakterizirani dvjema algebarskim operacijama, a to su zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

Definicija množenja vektora skalarom

Umnožak vektora sa skalarom daje vektor istog smjera, tako da:

- ako je $\vec{v}$ vektor i x skalar, onda je duljina vektora $x\vec{v}$ jednaka $|x| \cdot |\vec{v}|$ i
- ako je $\vec{v}$ vektor i $x > 0$ skalar, onda $x\vec{v}$ ima istu orijentaciju kao $\vec{v}$, a ako je $x < 0$ skalar, onda $x\vec{v}$ ima suprotnu orijentaciju od $\vec{v}$.

Nulvektor pomnožen s bilo kojim skalarom i bilo koji vektor pomnožen s nulom daju nulvektor ($x \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$).

Zadatak

Kako formulom opisati jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao zadani vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Zadatak

Kako formulom opisati jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao zadani vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$?

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}.$$

Zadatak

Pokažite da se množenjem $\vec{a} \neq \vec{0}$ s prikladnim skalarom može dobiti svaki vektor njegovog smjera.

Zadatak

Kako formulom opisati jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao zadani vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$?

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}.$$

Zadatak

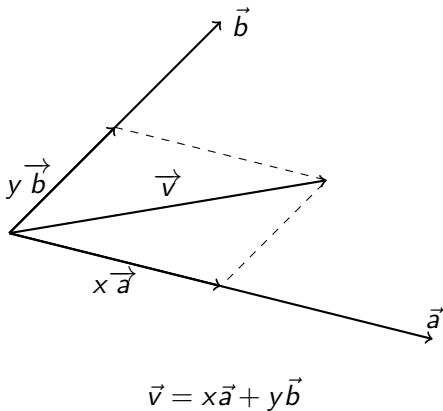
Pokažite da se množenjem $\vec{a} \neq \vec{0}$ s prikladnim skalarom može dobiti svaki vektor njegovog smjera.

Algebarska karakterizacija kolinearnosti

Dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su kolinearni ako i samo ako postoji jedinstven skalar x takav da je $\vec{w} = x \vec{v}$.

Prema prethodnom, uz odabir jednog nenul-vektora $\vec{a}$ su svi vektori njegovog smjera jednoznačno opisani jednim skalarom, tj. jednom koordinatom. No, što ćemo s vektorima u V^2 odnosno $V^2(O)$?

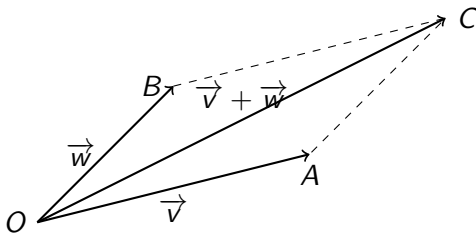
Prema prethodnom, uz odabir jednog nenul-vektora $\vec{a}$ su svi vektori njegovog smjera jednoznačno opisani jednim skalarom, tj. jednom koordinatom. No, što ćemo s vektorima u V^2 odnosno $V^2(O)$?



Zbrajanje vektora

Definicija zbrajanja vektora

Ako su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dva vektora i $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ njihovi reprezentanti sa zajedničkim početkom, onda je zbroj $\vec{v} + \vec{w}$ definiran ovako: Dopunimo AOB do paralelograma $AOBC$ (dakle, $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ su dvije stranice tog paralelograma). Tada je $\overrightarrow{OC}$ reprezentant vektora $\vec{v} + \vec{w}$.



Oduzimanje vektora definira se s $\vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w})$.

Napomena

Može se pokazati da se vektori u V^2 i V^3 mogu zbrajati koristeći pravilo trokuta: zbroj vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... se može dobiti tako da odaberemo predstavnika od $\vec{b}$ s početkom u kraju od $\vec{a}$, predstavnika od $\vec{c}$ s početkom u kraju od $\vec{b}$, itd. Zbroj $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$ je onda vektor određen orijentiranom dužinom čiji početak se podudara s početkom od $\vec{a}$, a kraj s krajem zadnjeg od zbrajanih vektora.

Napomena

Može se pokazati da se vektori u V^2 i V^3 mogu zbrajati koristeći pravilo trokuta: zbroj vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... se može dobiti tako da odaberemo predstavnika od $\vec{b}$ s početkom u kraju od $\vec{a}$, predstavnika od $\vec{c}$ s početkom u kraju od $\vec{b}$, itd. Zbroj $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$ je onda vektor određen orijentiranom dužinom čiji početak se podudara s početkom od $\vec{a}$, a kraj s krajem zadnjeg od zbrajanih vektora.

Svojstva zbrajanja i množenja skalarom

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v},$$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v},$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \quad (xy)\vec{v} = x(y\vec{v}),$$

$$x(\vec{v} + \vec{w}) = x\vec{v} + x\vec{w}, \quad (x + y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v}$$

Primjer

Centar mase sustava od n masa m_i s radij-vektorima $\vec{r}_i$ (u odnosu na istu točku O) ima radij-vektor

$$\vec{R} = \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Primjer

Centar mase sustava od n masa m_i s radij-vektorima $\vec{r}_i$ (u odnosu na istu točku O) ima radij-vektor

$$\vec{R} = \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Primjer

Ako naboji q_i imaju radij-vektore $\vec{r}_i$, dipolni moment tog sustava je

$$\vec{\mu} := \sum_i q_i \vec{r}_i.$$

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima?

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima? Koji su mogući kutovi između dvaju vektora?

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima? Koji su mogući kutovi između dvaju vektora? A dvaju nekolinearnih vektora?

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima? Koji su mogući kutovi između dvaju vektora? A dvaju nekolinearnih vektora?

Baza i koordinate u V^2 odnosno $V^2(O)$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksirana nekolinearna vektora u ravnini, uređeni par $(\vec{a}, \vec{b})$ zovemo bazom vektorskog prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Duljine a i b vektora baze te kut γ među njima se naziva parametrima baze.

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima? Koji su mogući kutovi između dvaju vektora? A dvaju nekolinearnih vektora?

Baza i koordinate u V^2 odnosno $V^2(O)$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksirana nekolinearna vektora u ravнини, uređeni par $(\vec{a}, \vec{b})$ zovemo bazom vektorskog prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Duljine a i b vektora baze te kut γ među njima se naziva parametrima baze.

Svi vektori u V^2 odnosno $V^2(O)$ jednoznačno se mogu opisati uređenim parom skalara koje nazivamo njihovim koordinatama, pri čemu $\vec{v} = [x, y]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (usp. slide 10).

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima? Koji su mogući kutovi između dvaju vektora? A dvaju nekolinearnih vektora?

Baza i koordinate u V^2 odnosno $V^2(O)$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksirana nekolinearna vektora u ravнини, uređeni par $(\vec{a}, \vec{b})$ zovemo bazom vektorskog prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Duljine a i b vektora baze te kut γ među njima se naziva parametrima baze.

Svi vektori u V^2 odnosno $V^2(O)$ jednoznačno se mogu opisati uređenim parom skalara koje nazivamo njihovim koordinatama, pri čemu $\vec{v} = [x, y]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (usp. slide 10).

Zašto u definiciji baze za V^2 odnosno $V^2(O)$ tražimo nekolinearnost vektora baze?

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima? Koji su mogući kutovi između dvaju vektora? A dvaju nekolinearnih vektora?

Baza i koordinate u V^2 odnosno $V^2(O)$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksirana nekolinearna vektora u ravnini, uređeni par $(\vec{a}, \vec{b})$ zovemo bazom vektorskog prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Duljine a i b vektora baze te kut γ među njima se naziva parametrima baze.

Svi vektori u V^2 odnosno $V^2(O)$ jednoznačno se mogu opisati uređenim parom skalara koje nazivamo njihovim koordinatama, pri čemu $\vec{v} = [x, y]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (usp. slide 10).

Zašto u definiciji baze za V^2 odnosno $V^2(O)$ tražimo nekolinearnost vektora baze? Može li jedan od vektora baze biti nulvektor?

Baza i koordinate

Kako definiramo kut među dvama vektorima? Koji su mogući kutovi između dvaju vektora? A dvaju nekolinearnih vektora?

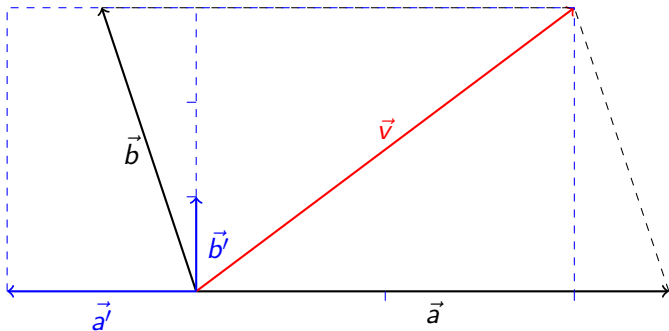
Baza i koordinate u V^2 odnosno $V^2(O)$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksirana nekolinearna vektora u ravnini, uređeni par $(\vec{a}, \vec{b})$ zovemo bazom vektorskog prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Duljine a i b vektora baze te kut γ među njima se naziva parametrima baze.

Svi vektori u V^2 odnosno $V^2(O)$ jednoznačno se mogu opisati uređenim parom skalara koje nazivamo njihovim koordinatama, pri čemu $\vec{v} = [x, y]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (usp. slide 10).

Zašto u definiciji baze za V^2 odnosno $V^2(O)$ tražimo nekolinearnost vektora baze? Može li jedan od vektora baze biti nulvektor? Koje su koordinate baznih vektora s obzirom na danu bazu od V^2 odnosno $V^2(O)$?

No, koordinate vektora u ravnini op'cenito ovise o odabiru baze!!!



Vektor $\vec{v}$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ima koordinate $[1, 1]$, ali u bazi $\{\vec{a}', \vec{b}'\}$ ima koordinate $[-2, 3]$.

Slično se dobije u trodimenzionalnom slučaju, pri čemu nam treba pojam (ne)komplanarnosti: Tri vektora u V^3 odnosno $V^3(O)$ nazivamo **komplanarnim** ako su paralelni istoj ravnini, odnosno ako bi uz odabir reprezentanata sa zajedničkim početkom sva tri reprezentanta bila u istoj ravnini.

Slično se dobije u trodimenzionalnom slučaju, pri čemu nam treba pojam (ne)komplanarnosti: Tri vektora u V^3 odnosno $V^3(O)$ nazivamo **komplanarnim** ako su paralelni istoj ravnini, odnosno ako bi uz odabir reprezentanata sa zajedničkim početkom sva tri reprezentanta bila u istoj ravnini.

Zadatak

Mogu li zbroj ili razlika dva (ili više) vektora biti s njima nekomplanarni?

Slično se dobije u trodimenzionalnom slučaju, pri čemu nam treba pojam (ne)komplanarnosti: Tri vektora u V^3 odnosno $V^3(O)$ nazivamo **komplanarnim** ako su paralelni istoj ravnini, odnosno ako bi uz odabir reprezentanata sa zajedničkim početkom sva tri reprezentanta bila u istoj ravnini.

Zadatak

Mogu li zbroj ili razlika dva (ili više) vektora biti s njima nekomplanarni?

Baza i koordinate u V^3 odnosno $V^3(O)$

Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tri fiksirana nekomplanarna vektora u prostoru, uređenu trojku $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nazivamo bazom prostora V^3 odnosno $V^3(O)$. Baza se zadaje svojim parametrima: a , b , c , $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Slično se dobije u trodimenzionalnom slučaju, pri čemu nam treba pojam (ne)komplanarnosti: Tri vektora u V^3 odnosno $V^3(O)$ nazivamo **komplanarnim** ako su paralelni istoj ravnini, odnosno ako bi uz odabir reprezentanata sa zajedničkim početkom sva tri reprezentanta bila u istoj ravnini.

Zadatak

Mogu li zbroj ili razlika dva (ili više) vektora biti s njima nekomplanarni?

Baza i koordinate u V^3 odnosno $V^3(O)$

Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tri fiksirana nekomplanarna vektora u prostoru, uređenu trojku $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nazivamo bazom prostora V^3 odnosno $V^3(O)$. Baza se zadaje svojim parametrima: a , b , c , $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Svi vektori u V^3 odnosno $V^3(O)$ jednoznačno se mogu opisati kao uređene trojke skalara (svojih koordinata), pri čemu $\vec{v} = [x, y, z]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Zašto u definiciji baze za V^3 odnosno $V^3(O)$ tražimo nekomplanarnosti vektora baze?

Zašto u definiciji baze za V^3 odnosno $V^3(O)$ tražimo nekomplanarnosti vektora baze? Mogu li dva vektora baze od V^3 odnosno $V^3(O)$ biti kolinearni?

Zašto u definiciji baze za V^3 odnosno $V^3(O)$ tražimo nekomplanarnosti vektora baze? Mogu li dva vektora baze od V^3 odnosno $V^3(O)$ biti kolinearni? Koje su koordinate baznih vektora s obzirom na danu bazu od V^3 odnosno $V^3(O)$?

Zadatak

Ako neki vektor u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\{\vec{b}, -\vec{a}, 2\vec{c}\}$?

Zašto u definiciji baze za V^3 odnosno $V^3(O)$ tražimo nekomplanarnosti vektora baze? Mogu li dva vektora baze od V^3 odnosno $V^3(O)$ biti kolinearni? Koje su koordinate baznih vektora s obzirom na danu bazu od V^3 odnosno $V^3(O)$?

Zadatak

Ako neki vektor u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ima koordinate $[1, 2, 3]$, koje koordinate on ima u bazi $\{\vec{b}, -\vec{a}, 2\vec{c}\}$?

Ako su vektori baze međusobno okomiti ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$), govorimo o **ortogonalnoj bazi**. Ako su još i iste, jedinične duljine, govorimo o **ortonormiranoj bazi**. Vektore ortonormiranih baza obično označavamo s $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Zadatak

Izvedite formule za koordinatno zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom!

Zadatak

Izvedite formule za koordinatno zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom!

$$[x, y, z] + [x', y', z'] = [x + x', y + y', z + z'],$$

$$\alpha[x, y, z] = [\alpha x, \alpha y, \alpha z].$$

Primjer

Za $\vec{v} = [1, 2, 0]$ i $\vec{w} = [-5, 1, 1]$ je $\vec{v} - 2\vec{w} = [11, 0, -2]$.

Zadatak

Izvedite formule za koordinatno zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom!

$$[x, y, z] + [x', y', z'] = [x + x', y + y', z + z'],$$

$$\alpha[x, y, z] = [\alpha x, \alpha y, \alpha z].$$

Primjer

Za $\vec{v} = [1, 2, 0]$ i $\vec{w} = [-5, 1, 1]$ je $\vec{v} - 2\vec{w} = [11, 0, -2]$.

Zadatak

Ako su dva vektora zadana koordinatama obzirom na istu bazu, kako ćemo po koordinatama prepoznati da su kolinearni?

Koordinatni sustavi i koordinate točaka

Koordinatni sustav

Koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru se sastoji od jedne fiksirane točke O (ishodišta) i jedne odabrane baze od $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$.

Koordinate točaka ravnine odnosno prostora se tad definiraju kao koordinate odgovarajućih radij-vektora.

Zadatak

Odredite koordinate vektora koji počinje u točki $(4, -2, 1)$, a završava u točki $(1, 0, -3)$. Odredite i njegov suprotni vektor.

Koordinatni sustavi i koordinate točaka

Koordinatni sustav

Koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru se sastoji od jedne fiksirane točke O (ishodišta) i jedne odabrane baze od $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$.

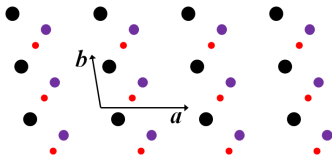
Koordinate točaka ravnine odnosno prostora se tad definiraju kao koordinate odgovarajućih radij-vektora.

Zadatak

Odredite koordinate vektora koji počinje u točki $(4, -2, 1)$, a završava u točki $(1, 0, -3)$. Odredite i njegov suprotni vektor.

Rešetka i jedinična ćelija

Jedinična ćelija je paralelogram odnosno paralelepiped razapet vektorima baze, a (primitivna) rešetka je skup svih točaka s cjelobrojnim koordinatama.



Periodičnost unutrašnje građe kristala znači da se među njenim simetrijama nalaze i translacije u tri nekomplanarna smjera. Odaberemo li tri odgovarajuća vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, oni čine bazu prostora. Tako odabranu bazu nazivamo **kristalografskom bazom**, a uz odabri ishodišta pripadnu rešetku zovemo (primitivnom) **kristalnom rešetkom**. Kristalografska se baza obično opisuje **kristalografskim parametrima**, tj. duljinama vektora baze (a, b, c) i kutovima među njima ($\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$).