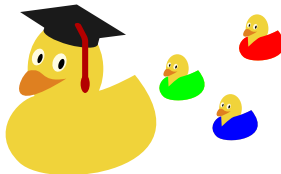


25. predavanje: Klasična algebra vektora.

Franka Miriam Brückler



Skalarni produkt

Zadatak

Ako su zadani parametri baze $a = b = c = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \gamma = 90^\circ$, koliko je dug vektor $\vec{v} = [1, -2, 3]$ i koji kut zatvara s vektorom $\vec{w} = [1, 1, 1]$?

Skalarni produkt

Zadatak

Ako su zadani parametri baze $a = b = c = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \gamma = 90^\circ$, koliko je dug vektor $\vec{v} = [1, -2, 3]$ i koji kut zatvara s vektorom $\vec{w} = [1, 1, 1]$?

Skalarni produkt

Skalarni produkt dva geometrijska $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vektora definiran je s

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v w \cos \varphi,$$

gdje je φ kut kojeg zatvaraju vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

Skalarni produkt

Zadatak

Ako su zadani parametri baze $a = b = c = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \gamma = 90^\circ$, koliko je dug vektor $\vec{v} = [1, -2, 3]$ i koji kut zatvara s vektorom $\vec{w} = [1, 1, 1]$?

Skalarni produkt

Skalarni produkt dva geometrijska $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vektora definiran je s

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v w \cos \varphi,$$

gdje je φ kut kojeg zatvaraju vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{v} &\geq 0; & \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}; & \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{w} \cdot \vec{v}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; & (x\vec{v}) \cdot \vec{w} &= x(\vec{v} \cdot \vec{w}). \end{aligned}$$

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan,

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan,
ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \varphi = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}}.$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora zadanih svojim koordinatama?

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \varphi = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}}.$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora zadanih svojim koordinatama? Kako izračunati udaljenost dviju točaka danih svojim koordinatama?

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

$$\varphi = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \varphi = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}}.$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora zadanih svojim koordinatama? Kako izračunati udaljenost dviju točaka danih svojim koordinatama?

Primjer

U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina 1 m, 2 m i 3 m, vektori $[-4, 1, 0]$ i $[1, 1, 0]$ su međusobno okomiti, ali da je baza bila ortonormirana, ta dva vektora ne bi bila okomita.

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}}$$

Kako iz koordinata izračunati skalarni produkt vektora zadanih svojim koordinatama? Kako izračunati udaljenost dviju točaka danih svojim koordinatama?

Primjer

U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina 1 m, 2 m i 3 m, vektori $[-4, 1, 0]$ i $[1, 1, 0]$ su međusobno okomiti, ali da je baza bila ortonormirana, ta dva vektora ne bi bila okomita.

Zadatak

Izvedite formulu za skalarni produkt dvaju vektora prostora V^3 zadanih koordinatama s obzirom na ortogonalnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture ($a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$) nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost? .

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture ($a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$) nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost? .

Zadatak

Neka je $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte $\angle(\vec{p}, \vec{q})$ za $\vec{p} = [3, -1]$ i $\vec{q} = [2, 1]$.

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture ($a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$) nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost? .

Zadatak

Neka je $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte $\angle(\vec{p}, \vec{q})$ za $\vec{p} = [3, -1]$ i $\vec{q} = [2, 1]$. Riješite i uvodni zadatak!

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture ($a = 100,0$ pm, $b = 200,0$ pm, $c = 150,0$ pm, $\alpha = \gamma = 90,00^\circ$, $\beta = 75,00^\circ$) nalaze na pozicijama $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$ i $B = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$, kolika je njihova udaljenost? .

Zadatak

Neka je $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte $\angle(\vec{p}, \vec{q})$ za $\vec{p} = [3, -1]$ i $\vec{q} = [2, 1]$. Riješite i uvodni zadatak!

Zadatak

Koji kut trebaju zatvarati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baze prostora V^2 ako znate da je $a = b$ i da su vektori koji obzirom na tu bazu imaju koordinate $[-2, 1]$ i $[0, 3]$ okomiti?

Primjer

Neki kristal kubičnog sustava ($a = b = c = 320,3 \text{ pm}$,
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ u jediničnoj ćeliji ima tri atoma, na pozicijama
 $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$, $B = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0)$ i $C = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Pritom je C vezan s
 A i B . Koji je kut te veze?

Primjer

Neki kristal kubičnog sustava ($a = b = c = 320,3 \text{ pm}$,
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ u jediničnoj ćeliji ima tri atoma, na pozicijama
 $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$, $B = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0)$ i $C = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Pritom je C vezan s
 A i B . Koji je kut te veze?

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{\left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{15}\right] \cdot \left[-\frac{2}{15}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right]}{\left| \left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{15}\right] \right| \left| \left[-\frac{2}{15}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right] \right|} = \\&= \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{25} + \frac{4}{225}} \cdot \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{9}{100} + \frac{1}{25}}} = \frac{-\frac{7}{150}}{\frac{133}{900}} = -\frac{6300}{19950} = \\&= -0,315789 \dots \Rightarrow \varphi = 108^\circ 25' .\end{aligned}$$

Je li $|\vec{CA}| = \sqrt{133}/30 = 0,384$?

Metrički tenzor

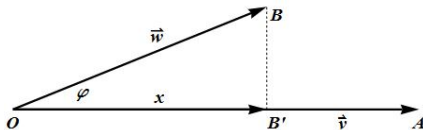
	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	a^2	$ab \cos \gamma$	$ac \cos \beta$
$\vec{b}$	$ab \cos \gamma$	b^2	$bc \cos \alpha$
$\vec{c}$	$ac \cos \beta$	$bc \cos \alpha$	c^2

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ pri pomaku $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ je

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos \theta.$$



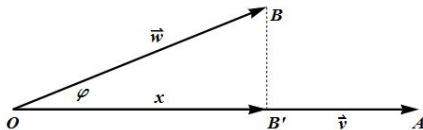
$$|\overrightarrow{OB'}| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{v}, \quad \vec{OB'} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v^2} \vec{v}$$

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ pri pomaku $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ je

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos \theta.$$



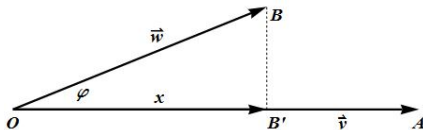
$$|\overrightarrow{OB'}| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{v}, \quad \vec{OB'} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v^2} \vec{v}$$

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ pri pomaku $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ je

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos \theta.$$



$$|\overrightarrow{OB'}| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{v}, \quad \vec{OB'} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v^2} \vec{v}$$

Zadatak

Ako su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dva vektora, što predstavlja iznos $v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito?

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Vektorski produkt

Vektorski produkt dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Vektorski produkt

Vektorski produkt dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ koji je

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koliko smjerova je na njih okomito? A ako su nekolinearni?

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (kako?).

Vektorski produkt

Vektorski produkt dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ koji je okomit na oba vektora, iznos od $\vec{v} \times \vec{w}$ je $v \cdot w \cdot \sin \varphi$, tj. jednaka je površini paralelograma razapetog s $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a orijentiran je tako da $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{v} \times \vec{w}$ poštuju pravilo desne ruke.

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$,

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$, **ortogonalnost**

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$, **ortogonalnost**

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i **antikomutativnost** $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$, **ortogonalnost**

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i **antikomutativnost** $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$. Vrijedi i

$$\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0},$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v},$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = v^2 w^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2,$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}$$

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -\pi \vec{v}$, koliko je $\vec{v} \times \vec{w}$?

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -\pi \vec{v}$, koliko je $\vec{v} \times \vec{w}$?

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -\pi \vec{v}$, koliko je $\vec{v} \times \vec{w}$?

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Zadatak

Uz koji uvjet vektori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ ne čine bazu prostora V^3 ?

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -\pi \vec{v}$, koliko je $\vec{v} \times \vec{w}$?

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Zadatak

Uz koji uvjet vektori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ ne čine bazu prostora V^3 ?

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -\pi \vec{v}$, koliko je $\vec{v} \times \vec{w}$?

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Zadatak

Uz koji uvjet vektori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ ne čine bazu prostora V^3 ?

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin \varphi$?

Kako izračunati $\vec{v} \times \vec{w}$ ili $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ako su poznate koordinate od $(\vec{u})$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$?

Recipročna baza

Definicija

Za odabranu desnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, pripadna recipročna (dualna) baza definirana je s

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}^* = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}, \vec{c}^* = \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b},$$

gdje je V volumen jedinične ćelije određene direktnom bazom.

Koordinate s obzirom na recipročnu bazu: $[h, k, l]^*$

Recipročna baza

Definicija

Za odabranu desnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, pripadna recipročna (dualna) baza definirana je s

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}^* = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}, \vec{c}^* = \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b},$$

gdje je V volumen jedinične ćelije određene direktnom bazom.

Koordinate s obzirom na recipročnu bazu: $[h, k, l]^*$

Direktni vs. recipročni prostor

Recipročna baza

Definicija

Za odabranu desnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, pripadna recipročna (dualna) baza definirana je s

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}^* = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}, \vec{c}^* = \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b},$$

gdje je V volumen jedinične ćelije određene direktnom bazom.

Koordinate s obzirom na recipročnu bazu: $[h, k, l]^*$

Direktni vs. recipročni prostor

Ako je kristalografska baza ortogonalna, kakva je odgovarajuća baza recipročnog prostora? A ako je ortonormirana?

Recipročna baza



Definicija

Za odabranu desnu bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, pripadna recipročna (dualna) baza definirana je s

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}^* = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}, \vec{c}^* = \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b},$$

gdje je V volumen jedinične ćelije određene direktnom bazom.

Koordinate s obzirom na recipročnu bazu: $[h, k, l]^*$

Direktni vs. recipročni prostor

Ako je kristalografska baza ortogonalna, kakva je odgovarajuća baza recipročnog prostora? A ako je ortonormirana?

$$(\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$[x, y, z] \times [x', y', z'] = V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - z'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) =$$

$$=: V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}[x, y, z] \times [x', y', z'] &= V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - z'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) = \\ &=: V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Zadatak

Kolika je površina trokuta čiji vrhovi u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu (s jedinicom duljine 1 cm) imaju koordinate $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$ i $(3, 6, 4)$?

$$\begin{aligned}
 [x, y, z] \times [x', y', z'] &= V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - z'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) = \\
 &=: V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Zadatak

Kolika je površina trokuta čiji vrhovi u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu (s jedinicom duljine 1 cm) imaju koordinate $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$ i $(3, 6, 4)$?

Zadatak

Neka je $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm i $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Bez korištenja gornje formule izračunajte $[1, 1, 0] \times [1, 0, 1]$.

$$\begin{aligned}[x, y, z] \times [x', y', z'] &= V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - z'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) = \\ &=: V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Zadatak

Kolika je površina trokuta čiji vrhovi u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu (s jedinicom duljine 1 cm) imaju koordinate $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$ i $(3, 6, 4)$?

Zadatak

Neka je $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm i $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Bez korištenja gornje formule izračunajte $[1, 1, 0] \times [1, 0, 1]$.

Sad možemo izračunati površinu svakog mnogokuta za kojeg

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt triju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je skalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Apsolutna vrijednost mješovitog produkta od $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je volumen paralelepipeda određenog s $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

Zašto je zagrada u gornjoj definiciji suvišna?

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt triju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je skalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Apsolutna vrijednost mješovitog produkta od $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je volumen paralelepipeda određenog s $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

Zašto je zagrada u gornjoj definiciji suvišna?

Ako je mješoviti produkt tri vektora nula, oni su

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt triju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je skalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Apsolutna vrijednost mješovitog produkta od $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je volumen paralelepipeda određenog s $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

Zašto je zagrada u gornjoj definiciji suvišna?

Ako je mješoviti produkt tri vektora nula, oni su komplanarni, tj. ne čine bazu prostora. Ako je $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) > 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ čine tzv. **desnu bazu**, a u suprotnom tzv. lijevu bazu.

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt

Mješoviti produkt triju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je skalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Apsolutna vrijednost mješovitog produkta od $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je volumen paralelepipeda određenog s $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

Zašto je zagrada u gornjoj definiciji suvišna?

Ako je mješoviti produkt tri vektora nula, oni su komplanarni, tj. ne čine bazu prostora. Ako je $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) > 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ čine tzv. **desnu bazu**, a u suprotnom tzv. lijevu bazu.

Primjer

Volumen jedinične ćelije (za desne baze) je uvijek $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

Zadatak

Neka je $\vec{a} \neq \vec{0}$. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{a}$ i $\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{a}$.

Zadatak

Neka je $\vec{a} \neq \vec{0}$. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{a}$ i $\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{a}$.

Ciklička invarijantnost mješovitog produkta:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}$$

Zadatak

Koliko iznosi $\vec{a}^* \cdot \vec{b}$? A $\vec{b}^* \cdot \vec{b}$?

$$\begin{aligned}\vec{a}^* \cdot \vec{a} &= \vec{b}^* \cdot \vec{b} = \vec{c}^* \cdot \vec{c} = 1, \\ \vec{a}^* \cdot \vec{b} &= \vec{a}^* \cdot \vec{c} = \vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{c} = \vec{c}^* \cdot \vec{a} = \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0.\end{aligned}$$

Zadatak

Izvedite formulu za skalarni produkt dva vektora od kojih su jednome poznate koordinate u direktnoj, a drugom u recipročnoj bazi!

Zadatak

Dokažite da je $V^ = \frac{1}{V}$, da je recipročna baza stvarno baza i da je recipročna baza recipročne baze direktna baza.*

Zadatak

Dokažite da je $V^ = \frac{1}{V}$, da je recipročna baza stvarno baza i da je recipročna baza recipročne baze direktna baza.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = V \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Zadatak

Koliki je volumen tetraedra s vrhovima $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$, $(3, 6, 4)$ i $(-1, -1, -1)$?

Zadatak

Dokažite da je $V^ = \frac{1}{V}$, da je recipročna baza stvarno baza i da je recipročna baza recipročne baze direktna baza.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = V \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Zadatak

Koliki je volumen tetraedra s vrhovima $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$, $(3, 6, 4)$ i $(-1, -1, -1)$?

Zadatak

Magnezij kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu. ($a = b = 3,21 \text{ \AA}$, $c = 5,21 \text{ \AA}$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$). Izračunajte $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$.