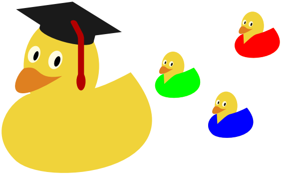
26. predavanje: Primjene klasične algebre vektora i analitičke geometrije prostora.

Franka Miriam Brückler



Što je kristalografska baza?

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija?

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze?

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze? Neovisno o parametrima baze, središte jedinične ćelije uvijek ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze? Neovisno o parametrima baze, središte jedinične ćelije uvijek ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak

Mineral malahit kristalizira u monoklinskom sustavu: $a = 9{,}502\,\text{Å}$, $b = 11{,}974\,\text{Å}$, $c = 3{,}240\,\text{Å}$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$. *Izračunajte:*

- $\vec{a} \times \vec{a} =$

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze? Neovisno o parametrima baze, središte jedinične ćelije uvijek ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak

Mineral malahit kristalizira u monoklinskom sustavu: $a = 9{,}502\,\text{Å}$, $b = 11{,}974\,\text{Å}$, $c = 3{,}240\,\text{Å}$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$. *Izračunajte:*

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \vec{0}$,
- $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} =$

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze? Neovisno o parametrima baze, središte jedinične ćelije uvijek ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak

Mineral malahit kristalizira u monoklinskom sustavu: $a = 9{,}502\,\text{Å}$, $b = 11{,}974\,\text{Å}$, $c = 3{,}240\,\text{Å}$, $\alpha = \gamma = 90°$, $\beta = 98{,}75°$. *Izračunajte:*

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,
- $\vec{b} \cdot \vec{c} = b\,c\,\cos\alpha = b\,c = 38{,}80\,\text{Å}$,
- $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} =$

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze? Neovisno o parametrima baze, središte jedinične ćelije uvijek ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak

Mineral malahit kristalizira u monoklinskom sustavu: $a = 9{,}502\,\text{Å}$, $b = 11{,}974\,\text{Å}$, $c = 3{,}240\,\text{Å}$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$. *Izračunajte:*

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \vec{0}$,
- $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = b\,c\,\cos\alpha = b\,c = 38{,}80\,\text{Å}$,
- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = V = B\,h =$

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze? Neovisno o parametrima baze, središte jedinične ćelije uvijek ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak

Mineral malahit kristalizira u monoklinskom sustavu: $a = 9{,}502\,\text{Å}$, $b = 11{,}974\,\text{Å}$, $c = 3{,}240\,\text{Å}$, $\alpha = \gamma = 90°$, $\beta = 98{,}75°$. *Izračunajte:*

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \vec{0}$,
- $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = b\,c\,\cos\alpha = b\,c = 38{,}80\,\text{Å}$,
- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = V = B\,h = (a\,c\sin\beta) \cdot b = 364{,}3\,\text{Å}^3$ *i*
- $V^* =$

Što je kristalografska baza? Što je jedinična ćelija? Što je recipročna baza?

Zadatak

Koje su koordinate središta jedinične ćelije? Ovisi li Vaš odgovor o parametrima baze? Neovisno o parametrima baze, središte jedinične ćelije uvijek ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak

Mineral malahit kristalizira u monoklinskom sustavu: $a = 9{,}502\,\mathring{A}$, $b = 11{,}974\,\mathring{A}$, $c = 3{,}240\,\mathring{A}$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$. *Izračunajte:*

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \vec{0}$,
- $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = b\,c\,\cos\alpha = b\,c = 38{,}80\,\mathring{A}$,
- $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = V = B\,h = (a\,c\sin\beta) \cdot b = 364{,}3\,\mathring{A}^3$ *i*
- $V^* = \frac{1}{V} = 2{,}745 \cdot 10^{-3}\,\mathring{A}^{-3}$.

Zadatak

Za heksagonske direktne baze ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$)*, odredite* $\vec{c} \cdot \vec{c^*}$, $\vec{c} \times \vec{c^*}$ *i parametre recipročne baze.*

Zadatak

Za heksagonske direktne baze ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$), *odredite* $\vec{c} \cdot \vec{c^*}$, $\vec{c} \times \vec{c^*}$ *i parametre recipročne baze.*
Za sve baze je $\vec{c} \cdot \vec{c^*} = 1$, *a zbog* $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ *je* $\vec{c} || \vec{c^*}$ *pa je* $\vec{c} \times \vec{c^*} = \vec{0}$.

Zadatak

Za heksagonske direktne baze ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$)*, odredite* $\vec{c} \cdot \vec{c^*}$, $\vec{c} \times \vec{c^*}$ *i parametre recipročne baze.*
Za sve baze je $\vec{c} \cdot \vec{c^*} = 1$, *a zbog* $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ *je* $\vec{c} || \vec{c^*}$ *pa je* $\vec{c} \times \vec{c^*} = \vec{0}$.

$$V = a^2 c \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Zadatak

Za heksagonske direktne baze ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$)*, odredite* $\vec{c} \cdot \vec{c^*}$, $\vec{c} \times \vec{c^*}$ *i parametre recipročne baze.*
Za sve baze je $\vec{c} \cdot \vec{c^*} = 1$, *a zbog* $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ *je* $\vec{c} || \vec{c^*}$ *pa je* $\vec{c} \times \vec{c^*} = \vec{0}$.

$$V = a^2 c \frac{\sqrt{3}}{2}; c^* = \frac{ab \sin\gamma}{V} = \frac{1}{c}; \quad a^* = \frac{bc \sin\alpha}{V} = \frac{2}{a\sqrt{3}} = b^*;$$

Zadatak

Za heksagonske direktne baze ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$), *odredite* $\vec{c} \cdot \vec{c^*}$, $\vec{c} \times \vec{c^*}$ *i parametre recipročne baze.*
Za sve baze je $\vec{c} \cdot \vec{c^*} = 1$, *a zbog* $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ *je* $\vec{c} || \vec{c^*}$ *pa je* $\vec{c} \times \vec{c^*} = \vec{0}$.

$$V = a^2 c \frac{\sqrt{3}}{2}; c^* = \frac{ab \sin\gamma}{V} = \frac{1}{c}; \quad a^* = \frac{bc \sin\alpha}{V} = \frac{2}{a\sqrt{3}} = b^*;$$

$\vec{a^*}, \vec{b^*} \perp \vec{c}$, *pa* $\vec{a^*}$ *i* $\vec{b^*}$ *leže u istoj ravnini kao* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$, *dakle*
$\alpha^* = \beta^* = 90^\circ$.

Zadatak

Za heksagonske direktne baze ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$)*, odredite* $\vec{c} \cdot \vec{c^*}$, $\vec{c} \times \vec{c^*}$ *i parametre recipročne baze.*
Za sve baze je $\vec{c} \cdot \vec{c^*} = 1$, *a zbog* $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ *je* $\vec{c} || \vec{c^*}$ *pa je* $\vec{c} \times \vec{c^*} = \vec{0}$.

$$V = a^2 c \frac{\sqrt{3}}{2}; c^* = \frac{ab \sin \gamma}{V} = \frac{1}{c}; \quad a^* = \frac{bc \sin \alpha}{V} = \frac{2}{a\sqrt{3}} = b^*;$$

$\vec{a^*}, \vec{b^*} \perp \vec{c}$, *pa* $\vec{a^*}$ *i* $\vec{b^*}$ *leže u istoj ravnini kao* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$, *dakle* $\alpha^* = \beta^* = 90^\circ$. *Skiciranjem njihovih smjerova i orijentacija koristeći pravilo desne ruke, vidimo da je* $\gamma^* = 60^\circ$.

Međumrežni razmak

Što su mrežne ravine?

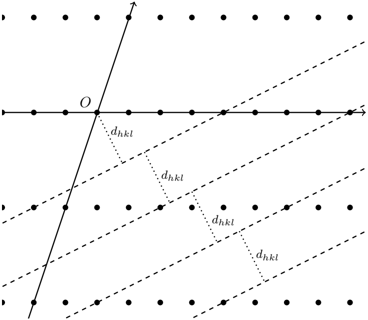
Međumrežni razmak

Što su mrežne ravine? Što su Millerovi indeksi smjera mrežnih ravnina?

Međumrežni razmak

Što su mrežne ravine? Što su Millerovi indeksi smjera mrežnih ravnina? Koje su moguće jednadžbe mrežnih ravnina smjera (hkl)? Udaljenost dvije susjedne mrežne ravnine istog smjera (hkl) naziva se međumrežnim razmakom (tog smjera) i označava s d_{hkl}.

Uočimo: d_{hkl} je točno isto što i udaljenost od O do ravnine $h\,x + k\,y + l\,z = 1$.



Teorem

$$d_{100} = \frac{1}{a^*} = \frac{V}{b\,c\sin\alpha};\, d_{010} = \frac{1}{b^*} = \frac{V}{a\,c\sin\beta};\, d_{001} = \frac{1}{c^*} = \frac{V}{a\,b\sin\gamma}.$$

Teorem

$$d_{100} = \frac{1}{a^*} = \frac{V}{b\,c\sin\alpha};\, d_{010} = \frac{1}{b^*} = \frac{V}{a\,c\sin\beta};\, d_{001} = \frac{1}{c^*} = \frac{V}{a\,b\sin\gamma}.$$

Jediničnu ćeliju je možemo gledati tako da joj je paralelogram stranica a i b i kuta γ osnovka: $V = a\,b\sin\gamma \cdot h$.

Teorem

$$d_{100} = \frac{1}{a^*} = \frac{V}{b\,c\sin\alpha};\, d_{010} = \frac{1}{b^*} = \frac{V}{a\,c\sin\beta};\, d_{001} = \frac{1}{c^*} = \frac{V}{a\,b\sin\gamma}.$$

Jediničnu ćeliju je možemo gledati tako da joj je paralelogram stranica a i b i kuta γ osnovka: $V = a\,b\sin\gamma \cdot h$. Toj osnovki paralelna ploha na jediničnoj ćeliji leži u ravnini smjera (001) najbližoj ishodištu: $h = d_{001} \Rightarrow c^* = \frac{1}{V}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{a\,b\sin\gamma}{V} = \frac{1}{d_{001}}$.

Zadatak

Izvedite formulu za α^* *, koristeći*
$(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r} \times \vec{s}) = (\vec{p} \cdot \vec{r})(\vec{q} \cdot \vec{s}) - (\vec{p} \cdot \vec{s})(\vec{q} \cdot \vec{r})$.

Teorem

$$d_{100} = \frac{1}{a^*} = \frac{V}{b\,c\sin\alpha};\, d_{010} = \frac{1}{b^*} = \frac{V}{a\,c\sin\beta};\, d_{001} = \frac{1}{c^*} = \frac{V}{a\,b\sin\gamma}.$$

Jediničnu ćeliju je možemo gledati tako da joj je paralelogram stranica a i b i kuta γ osnovka: $V = a\,b\sin\gamma \cdot h$. Toj osnovki paralelna ploha na jediničnoj ćeliji leži u ravnini smjera (001) najbližoj ishodištu: $h = d_{001} \Rightarrow c^* = \frac{1}{V}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{a\,b\sin\gamma}{V} = \frac{1}{d_{001}}$.

Zadatak

Izvedite formulu za α^* , koristeći
$(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r} \times \vec{s}) = (\vec{p} \cdot \vec{r})(\vec{q} \cdot \vec{s}) - (\vec{p} \cdot \vec{s})(\vec{q} \cdot \vec{r})$.

$$\cos\alpha^* = \frac{\vec{b}^* \cdot \vec{c}^*}{b^*\, c^*} = \frac{V^2}{a^2 bc\sin\beta\sin\gamma}\,\frac{1}{V^2}(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$

$$= \frac{1}{a^2 bc\sin\beta\sin\gamma}\Big((\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{c} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{a})\Big) = \frac{\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$$

Fundamentalni zakon recipročne rešetke

Teorem

$$|[h, k, l]^*| \cdot d_{hkl} = 1.$$

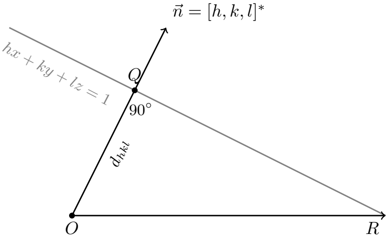
Neka je R probodište ravnine $h\,x + k\,y + l\,z = 1$ s jednom od koordinatnih osi, recimo s x-osi: $R = \left(\frac{1}{h}, 0, 0\right)$.

Fundamentalni zakon recipročne rešetke

Teorem

$$|[h,k,l]^*| \cdot d_{hkl} = 1.$$

Neka je R probodište ravnine $h\,x + k\,y + l\,z = 1$ s jednom od koordinatnih osi, recimo s x-osi: $R = \left(\frac{1}{h}, 0, 0\right)$.



$$d_{hkl} = \frac{|\overrightarrow{OR} \cdot \vec{n}|}{|[h,k,l]^*|} = \frac{[h,k,l]^* \cdot \left[\frac{1}{h}, 0, 0\right]}{|[h,k,l]^*|} = \frac{1}{|[h,k,l]^*|}$$

Zadatak

Dokažite:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

Zadatak

Dokažite:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

$$\frac{1}{d_{hkln^2}} = |[h, k, l]^*|^2 =$$

Zadatak

Dokažite:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

$$\frac{1}{d_{hkln^2}} = |[h, k, l]^*|^2 = \; = \sqrt{(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*) \cdot (h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)} =$$

Zadatak

Dokažite:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

$$\frac{1}{d_{hkln^2}} = |[h,k,l]^*|^2 = \; = \sqrt{(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)\cdot(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)} =$$

$$= \sqrt{h^2(a^*)^2 + k^2(b^*)^2 + l^2(c^*)^2} =$$

Zadatak

Dokažite:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

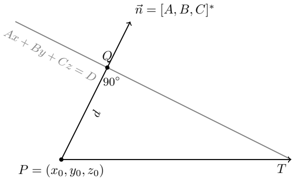
$$\frac{1}{d_{hkl n^2}} = |[h, k, l]^*|^2 = \ = \sqrt{(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*) \cdot (h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)} =$$

$$= \sqrt{h^2(a^*)^2 + k^2(b^*)^2 + l^2(c^*)^2} = \ = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

Zadatak

Parametri nekog kristala tetragonskog sustava su $a = b = 4{,}820\,\text{Å}$, $c = 6{,}288\,\text{Å}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. *Koliko iznosi međumrežni razmak ravnina smjerova* $(3\bar{2}1)$ *i* $(00\bar{1})$*?*

Udaljenost točke do ravnine



Slično kao u dokazu fundamentalnog zakona recipročne rešetke dokazuje se:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{|[A, B, C]^*|}$$

Zadatak

Odredite udaljenost točke $(1, 2, 3)$ *do ravnine* $\sqrt{3}x - \pi y = e$ *ako je* $a = 8,\ b = \sqrt{10},\ c = e\pi,\ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Zadatak

Odredite kut φ između y-osi i normale smjera (123) *ako je* $a = 100$ Å, $b = 150$ Å, $c = 180$ Å, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$.

Zadatak

Odredite kut φ *između y-osi i normale smjera* (123) *ako je* $a = 100\,\text{Å}$, $b = 150\,\text{Å}$, $c = 180\,\text{Å}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$.
$\vec{n} = [1, 2, 3]^*$, *a smjer y-osi je* $\vec{b} = [0, 1, 0]$

Zadatak

Odredite kut φ *između y-osi i normale smjera* (123) *ako je* $a = 100\,\text{Å},\ b = 150\,\text{Å},\ c = 180\,\text{Å},\ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.
$\vec{n} = [1,2,3]^*$, *a smjer y-osi je* $\vec{b} = [0,1,0]$ *pa je*

$$\cos\varphi = \frac{[1,2,3]^* \cdot [0,1,0]}{||[1,2,3]^*|| \cdot b} = \frac{2d_{123}}{b}$$

Zadatak

Odredite kut φ *između y-osi i normale smjera* (123) *ako je* $a = 100\,\text{Å}$, $b = 150\,\text{Å}$, $c = 180\,\text{Å}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

$\vec{n} = [1, 2, 3]^*$, *a smjer y-osi je* $\vec{b} = [0, 1, 0]$ *pa je*

$$\cos\varphi = \frac{[1, 2, 3]^* \cdot [0, 1, 0]}{||[1, 2, 3]^*|| \cdot b} = \frac{2d_{123}}{b}$$

$\Rightarrow \varphi = \mathrm{acos}\frac{2d_{123}}{b} = 55^\circ 33'$.

Zadatak

Odredite kut φ *između y-osi i normale smjera* (123) *ako je* $a = 100\,Å$, $b = 150\,Å$, $c = 180\,Å$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

$\vec{n} = [1,2,3]^*$, *a smjer y-osi je* $\vec{b} = [0,1,0]$ *pa je*

$$\cos\varphi = \frac{[1,2,3]^* \cdot [0,1,0]}{||[1,2,3]^*|| \cdot b} = \frac{2d_{123}}{b}$$

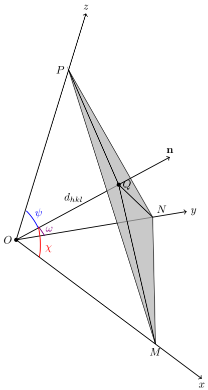
$\Rightarrow \varphi = \operatorname{acos}\frac{2d_{123}}{b} = 55^\circ 33'$.

Zadatak

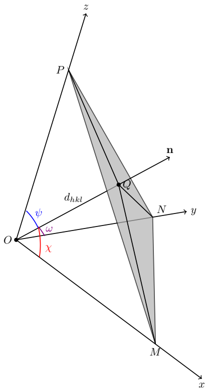
Dokažite da za sve tipove koordinatnih sustava i sve $h, k, l \neq 0$ *vrijedi*

$$d_{hkl} = \frac{V}{|h\,k\,l|\, P_{\triangle MNP}},$$

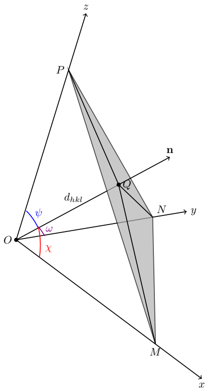
gdje su M, N, P *probodišta ravnine* $hx + ky + lz = 1$ *s koordinatnim osima.*



Međumrežni razmak je visina $d_{hkl} = |OQ|$ piramide $OMNP$.

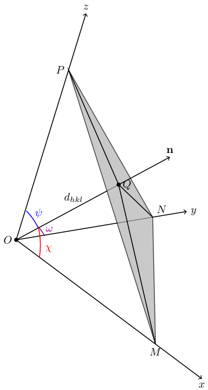


Međumrežni razmak je visina $d_{hkl} = |OQ|$ piramide $OMNP$.
Odsječci ravnine $hx + ky + lz = 1$ na osima su redom $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$.



Međumrežni razmak je visina $d_{hkl} = |OQ|$ piramide $OMNP$.
Odsječci ravnine $hx + ky + lz = 1$ na osima su redom $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$.

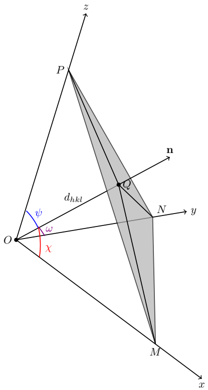
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{h}\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{k}\overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{OP} = \frac{1}{l}\overrightarrow{c}$$



Međumrežni razmak je visina $d_{hkl} = |OQ|$ piramide $OMNP$.
Odsječci ravnine $hx + ky + lz = 1$ na osima su redom $\frac{1}{h}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{h}\overrightarrow{a}, \; \overrightarrow{ON} = \frac{1}{k}\overrightarrow{b}, \; \overrightarrow{OP} = \frac{1}{l}\overrightarrow{c}$$

$$\angle OQM = \angle OQN = \angle OQP = 90^\circ, \angle NOP = \alpha, \angle MOP = \beta, \angle MON = \gamma$$



Međumrežni razmak je visina $d_{hkl} = |OQ|$ piramide $OMNP$.
Odsječci ravnine $hx + ky + lz = 1$ na osima su redom $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{h}\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{k}\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{OP} = \frac{1}{l}\overrightarrow{c}$$

$$\angle OQM = \angle OQN = \angle OQP = 90^\circ, \angle NOP = \alpha, \angle MOP = \beta, \angle MON = \gamma$$

$$\frac{1}{3}d_{hkl}P_{\triangle MNP} = V_{OMNP} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|}V$$

$$\frac{1}{3}d_{hkl}P_{\triangle MNP} = V_{OMNP} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|}V$$

Primjer

$a = 100\,\mathrm{pm},\ b = 200\,\mathrm{pm},\ c = 250\,\mathrm{pm},\ \alpha = \gamma = 90°,\ \beta = 60°$:
$d_{322} = ?$

1. *Ravnina* $3x + 2y + 2z = 1$.

$$\frac{1}{3}d_{hkl}P_{\triangle MNP} = V_{OMNP} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\times\overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|}V$$

Primjer

$a = 100\,\mathrm{pm},\ b = 200\,\mathrm{pm},\ c = 250\,\mathrm{pm},\ \alpha = \gamma = 90°,\ \beta = 60°$:
$d_{322} =?$

1. *Ravnina* $3x + 2y + 2z = 1.$
2. $|OM| = 33{,}\dot{3}\ pm,\ |ON| = 100\ pm,\ |OP| = 125\ pm.$

$$\frac{1}{3} d_{hkl} P_{\triangle MNP} = V_{OMNP} = \frac{1}{3} |\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|} V$$

Primjer

$a = 100\,\mathrm{pm},\ b = 200\,\mathrm{pm},\ c = 250\,\mathrm{pm},\ \alpha = \gamma = 90°,\ \beta = 60°$:
$d_{322} = ?$

1. *Ravnina* $3x + 2y + 2z = 1$.
2. $|OM| = 33{,}\dot{3}\ pm$, $|ON| = 100\ pm$, $|OP| = 125\ pm$.
3. $\triangle OMN$ *i* $\triangle ONP$ *su pravokutni pa Pitagorin poučak daje* $|MN| = 105{,}41\ pm$ *i* $|NP| = 160{,}08\ pm$; *za* $\triangle OMP$ *koristimo kosinusov poučak i dobijemo* $|MP| = 112{,}11\ pm$.

$$\frac{1}{3}d_{hkl}P_{\triangle MNP} = V_{OMNP} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|}V$$

Primjer

$a = 100\,\text{pm},\ b = 200\,\text{pm},\ c = 250\,\text{pm},\ \alpha = \gamma = 90^\circ,\ \beta = 60^\circ$: $d_{322} =?$

1. *Ravnina* $3x + 2y + 2z = 1$.
2. $|OM| = 33{,}\dot{3}$ *pm*, $|ON| = 100$ *pm*, $|OP| = 125$ *pm*.
3. $\triangle OMN$ *i* $\triangle ONP$ *su pravokutni pa Pitagorin poučak daje* $|MN| = 105{,}41$ *pm i* $|NP| = 160{,}08$ *pm; za* $\triangle OMP$ *koristimo kosinusov poučak i dobijemo* $|MP| = 112{,}11$ *pm*.
4. *Po Heronovoj formuli je* $A_{\triangle MNP} = 77.042{,}116$ pm^2.

$$\frac{1}{3} d_{hkl} P_{\triangle MNP} = V_{OMNP} = \frac{1}{3} |\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|} V$$

Primjer

$a = 100\,\mathrm{pm},\ b = 200\,\mathrm{pm},\ c = 250\,\mathrm{pm},\ \alpha = \gamma = 90°,\ \beta = 60°$: $d_{322} = ?$

1. *Ravnina* $3x + 2y + 2z = 1$.
2. $|OM| = 33{,}\dot{3}\ pm$, $|ON| = 100\ pm$, $|OP| = 125\ pm$.
3. $\triangle OMN$ *i* $\triangle ONP$ *su pravokutni pa Pitagorin poučak daje* $|MN| = 105{,}41\ pm$ *i* $|NP| = 160{,}08\ pm$; *za* $\triangle OMP$ *koristimo kosinusov poučak i dobijemo* $|MP| = 112{,}11\ pm$.
4. *Po Heronovoj formuli je* $A_{\triangle MNP} = 77.042{,}116\ pm^2$.
5. $V = abc \sin\beta = 4.330.127{,}019\ pm^3$.

$$\frac{1}{3}d_{hkl}P_{\triangle MNP} = V_{OMNP} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|}V$$

Primjer

$a = 100\,\mathrm{pm}$, $b = 200\,\mathrm{pm}$, $c = 250\,\mathrm{pm}$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$: $d_{322} = ?$

1. *Ravnina* $3x + 2y + 2z = 1$.
2. $|OM| = 33{,}\dot{3}\ pm$, $|ON| = 100\ pm$, $|OP| = 125\ pm$.
3. $\triangle OMN$ *i* $\triangle ONP$ *su pravokutni pa Pitagorin poučak daje* $|MN| = 105{,}41\ pm$ *i* $|NP| = 160{,}08\ pm$; *za* $\triangle OMP$ *koristimo kosinusov poučak i dobijemo* $|MP| = 112{,}11\ pm$.
4. *Po Heronovoj formuli je* $A_{\triangle MNP} = 77.042{,}116\ pm^2$.
5. $V = abc \sin\beta = 4.330.127{,}019\ pm^3$.
6. *Dakle je* $d_{hkl} = 4{,}68(37\ldots)\ pm$.

Zadatak

Malahit kristalizira u monoklinskom sustavu ($a = 9{,}502$ Å, $b = 11{,}974$ Å, $c = 3{,}240$ Å, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$). *Odredite* $d_{20\bar{1}}$ *za kristale malahita.*

Zadatak

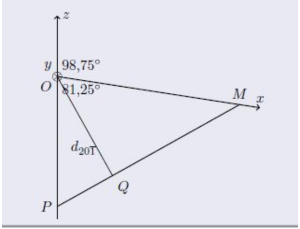
Malahit kristalizira u monoklinskom sustavu ($a = 9{,}502$ Å, $b = 11{,}974$ Å, $c = 3{,}240$ Å, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$)*. Odredite* $d_{20\bar{1}}$ *za kristale malahita.*

Gledamo ravninu $2x - z = 1$

Zadatak

Malahit kristalizira u monoklinskom sustavu ($a = 9{,}502$ Å, $b = 11{,}974$ Å, $c = 3{,}240$ Å, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$). Odredite $d_{20\bar{1}}$ za kristale malahita.

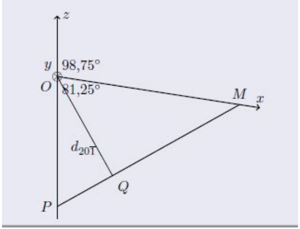
Gledamo ravninu $2x - z = 1$ ($\parallel$ y-osi, $\perp$ (x, z)-ravninu)



Zadatak

Malahit kristalizira u monoklinskom sustavu ($a = 9{,}502$ Å, $b = 11{,}974$ Å, $c = 3{,}240$ Å, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98{,}75^\circ$). Odredite $d_{20\bar{1}}$ za kristale malahita.

Gledamo ravninu $2x - z = 1$ ($\parallel$ y-osi, $\perp$ (x, z)-ravninu)



$$|MP|^2 = |OM|^2 + |OP|^2 - 2|OM||OP|\cos(81^\circ 25') \Rightarrow |MP| \approx 5{,}3279\,\text{Å},$$

$$|OM| = \frac{1}{2}a, \quad |OP| = c,$$

$$2P_{\triangle OMP} = d_{20\bar{1}}|MP| = |OM||OP|\cos(81^\circ 25') \Rightarrow d_{20\bar{1}} \approx 2{,}856\,\text{Å}^2.$$

Zadatak

Koji kut s b-osi proizvoljnog kristalografskog koordinatnog sustava zatvara vektor normale na ravninu smjera (123)*?*

Zadatak

Koji kut s b-osi proizvoljnog kristalografskog koordinatnog sustava zatvara vektor normale na ravninu smjera (123)*?*

$$\cos\psi = \frac{[1,2,3]^* \cdot [0,1,0]}{|[1,2,3]^*|\, b} = \frac{2}{b} d_{123}.$$

Zadatak

Koji kut s b-osi proizvoljnog kristalografskog koordinatnog sustava zatvara vektor normale na ravninu smjera (123)*?*

$$\cos\psi = \frac{[1,2,3]^* \cdot [0,1,0]}{|[1,2,3]^*|\, b} = \frac{2}{b} d_{123}.$$

Zadatak

Ako je dana heksagonska baza s $a = b = 123{,}0\,\mathrm{pm}$, $c = 456{,}1\,\mathrm{pm}$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, *izračunajte površinu* P *paralelograma određenog vektorima* $[0,1,2]$ *i* $[-1,0,5]$ *te volumen* V *paralelepipeda određenog s ta dva vektora i vektorom* $[3,2,0]$.

Zadatak

Koji kut s b-osi proizvoljnog kristalografskog koordinatnog sustava zatvara vektor normale na ravninu smjera (123)*?*

$$\cos\psi = \frac{[1,2,3]^* \cdot [0,1,0]}{|[1,2,3]^*|\, b} = \frac{2}{b} d_{123}.$$

Zadatak

Ako je dana heksagonska baza s $a = b = 123{,}0\,\mathrm{pm}$, $c = 456{,}1\,\mathrm{pm}$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, *izračunajte površinu* P *paralelograma određenog vektorima* $[0,1,2]$ *i* $[-1,0,5]$ *te volumen* $\overline{V}$ *paralelepipeda određenog s ta dva vektora i vektorom* $[3,2,0]$.

$V = a^2 c \frac{\sqrt{3}}{2}$, $P = V \cdot |[0,1,2] \times [-1,0,5]| = V \cdot |[5,-2,1]^*| = \frac{V}{d_{5\bar{2}1}} =?!$,

$\overline{V} = V[5,-2,1]^* \cdot [3,2,0] = 11V \approx 6572012{,}52\,\mathrm{pm}^3$,

Zadatak

Koji kut s b-osi proizvoljnog kristalografskog koordinatnog sustava zatvara vektor normale na ravninu smjera (123)*?*

$$\cos\psi = \frac{[1,2,3]^* \cdot [0,1,0]}{|[1,2,3]^*|\, b} = \frac{2}{b} d_{123}.$$

Zadatak

Ako je dana heksagonska baza s $a = b = 123{,}0\,\mathrm{pm}$, $c = 456{,}1\,\mathrm{pm}$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$, *izračunajte površinu* P *paralelograma određenog vektorima* $[0,1,2]$ *i* $[-1,0,5]$ *te volumen* $\overline{V}$ *paralelepipeda određenog s ta dva vektora i vektorom* $[3,2,0]$.

$V = a^2 c \frac{\sqrt{3}}{2}$, $P = V \cdot |[0,1,2] \times [-1,0,5]| = V \cdot |[5,-2,1]^*| = \frac{V}{d_{5\bar{2}1}} =$?!,

$\overline{V} = V[5,-2,1]^* \cdot [3,2,0] = 11V \approx 6572012{,}52\,\mathrm{pm}^3$,

$$|[5,-2,1]|^2 = 25(a^*)^2 + 4(b^*)^2 + (c^*)^2 - 20a^*b^*\cos 60° = \frac{76}{3a^2} + \frac{1}{c^2}$$

Dakle, $P = 2{,}449 \cdot 10^5\,\mathrm{pm}^2$.