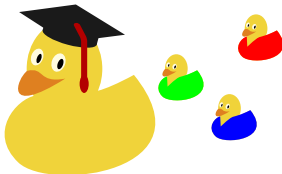


26. predavanje: Analitička geometrija prostora.

Franka Miriam Brückler



Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Što je koordinatni sustav u prostoru? Kada kažemo da je koordinatni sustav Kartezijev?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Što je koordinatni sustav u prostoru? Kada kažemo da je koordinatni sustav Kartezijev? Kako definiramo koordinate točke u prostoru?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Što je koordinatni sustav u prostoru? Kada kažemo da je koordinatni sustav Kartezijev? Kako definiramo koordinate točke u prostoru? Što su koordinatne osi? A koordinatne ravnine?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Što je koordinatni sustav u prostoru? Kada kažemo da je koordinatni sustav Kartezijev? Kako definiramo koordinate točke u prostoru? Što su koordinatne osi? A koordinatne ravnine? Što je rešetka?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Što je koordinatni sustav u prostoru? Kada kažemo da je koordinatni sustav Kartezijev? Kako definiramo koordinate točke u prostoru? Što su koordinatne osi? A koordinatne ravnine? Što je rešetka?

S koliko jednadžbi se zadaje ploha, a s koliko krivulja u prostoru?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Što je koordinatni sustav u prostoru? Kada kažemo da je koordinatni sustav Kartezijev? Kako definiramo koordinate točke u prostoru? Što su koordinatne osi? A koordinatne ravnine? Što je rešetka?

S koliko jednadžbi se zadaje ploha, a s koliko krivulja u prostoru?

Zadatak

Ako je $a = b = c \neq 1$ i $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, koje su koordinate polovišta dužine $\overline{TT'}$ gdje je $T = (1, 2, 3)$ i $T' = (-3, -2, -1)$?

Analitička geometrija prostora

Što je to analitička geometrija ravnine?

Kako nazivamo 0-, 1- i 2-dimenzionalne objekte u prostoru?

Što je koordinatni sustav u prostoru? Kada kažemo da je koordinatni sustav Kartezijev? Kako definiramo koordinate točke u prostoru? Što su koordinatne osi? A koordinatne ravnine? Što je rešetka?

S koliko jednadžbi se zadaje ploha, a s koliko krivulja u prostoru?

Zadatak

Ako je $a = b = c \neq 1$ i $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, koje su koordinate polovišta dužine $\overline{TT'}$ gdje je $T = (1, 2, 3)$ i $T' = (-3, -2, -1)$? Izvedite formulu za $d(T, T')$ ako je $\mathcal{B}$ zadana gornjim parametrima.

Zadatak

Skicirajte rešetku u ravnini ako je $a = 1$ cm, $b = 2$ cm i $\gamma = 45^\circ$.

Ravnine i pravci u prostoru

Što u ravnini predstavlja jednačba $y = 0$? A u prostoru?

Ravnine i pravci u prostoru

Što u ravnini predstavlja jednačba $y = 0$? A u prostoru? Što u prostoru predstavlja jednačba $2x = 3$? A $x + 2y = 0$?

Ravnine i pravci u prostoru

Što u ravnini predstavlja jednačba $y = 0$? A u prostoru? Što u prostoru predstavlja jednačba $2x = 3$? A $x + 2y = 0$?

Opći oblik jednačbe ravnine u prostoru je

$$Ax + By + Cz = D,$$

gdje bar jedan od koeficijenata A , B i C nije nula.

Ravnine i pravci u prostoru

Što u ravnini predstavlja jednačba $y = 0$? A u prostoru? Što u prostoru predstavlja jednačba $2x = 3$? A $x + 2y = 0$?

Opći oblik jednačbe ravnine u prostoru je

$$Ax + By + Cz = D,$$

gdje bar jedan od koeficijenata A , B i C nije nula.

Zadatak

Koji uvjet moraju zadovoljavati koeficijenti A , B , C , D u općoj jednačbi ravnine da bi se radilo o općoj ravnini koja prolazi kroz ishodište? O općoj ravnini koja je paralelna s osi ordinata? O općoj ravnini koja je paralelna s (x, z) -ravninom? Ovisi li vaši odgovori o tipu koordinatnog sustava?

Segmentni oblik jednađbe ravnine:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Zadatak

Napišite još dvije jednađbe koja predstavljaju istu ravninu kao $2x - 5y + z = 10$. Navedite koordinate po jedne točke koja je u toj ravnini i jedne koja nije.

Segmentni oblik jednađbe ravnine:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Zadatak

Napišite još dvije jednađbe koja predstavljaju istu ravninu kao $2x - 5y + z = 10$. Navedite koordinate po jedne točke koja je u toj ravnini i jedne koja nije.

Zadatak

Dokažite da je skup svih točaka (x, y, z) prostora kojima je skalarni produkt s vektorom $\vec{n} = [1, -1, 2]^$ jednak 5 ravnina okomita na $\vec{n}$.*

Segmentni oblik jednađbe ravnine:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Zadatak

Napišite još dvije jednađbe koja predstavljaju istu ravninu kao $2x - 5y + z = 10$. Navedite koordinate po jedne točke koja je u toj ravnini i jedne koja nije.

Zadatak

Dokažite da je skup svih točaka (x, y, z) prostora kojima je skalarni produkt s vektorom $\vec{n} = [1, -1, 2]^$ jednak 5 ravnina okomita na $\vec{n}$.*

Općenito: $\vec{n} = [A, B, C]^*$ je normale ravnine $Ax + By + Cz = D$.

Segmentni oblik jednadžbe ravnine:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Zadatak

Napišite još dvije jednadžbe koja predstavljaju istu ravninu kao $2x - 5y + z = 10$. Navedite koordinate po jedne točke koja je u toj ravnini i jedne koja nije.

Zadatak

Dokažite da je skup svih točaka (x, y, z) prostora kojima je skalarni produkt s vektorom $\vec{n} = [1, -1, 2]^$ jednak 5 ravnina okomita na $\vec{n}$.*

Općenito: $\vec{n} = [A, B, C]^*$ je normale ravnine $Ax + By + Cz = D$.

Zadatak

Odredite jednadžbu ravnine kojoj vektor normale ima smjer $[2, 3, 4]^$ i koja sadrži točku $(1, 1, 1)$.*

Mrežne ravnine

Mrežna ravnina je ravnina koja ne prolazi ishodištem i sadrži tri nekolinearne točke rešetke.

Zadatak

Nadite jednadžbu mrežne ravnine koja sadrži točke $(0, -1, 5)$, $(-5, -4, 1)$ i $(10, 5, 0)$.

Mrežne ravnine

Mrežna ravnina je ravnina koja ne prolazi ishodištem i sadrži tri nekolinearne točke rešetke.

Zadatak

Nadite jednadžbu mrežne ravnine koja sadrži točke $(0, -1, 5)$, $(-5, -4, 1)$ i $(10, 5, 0)$.

Millerovi indeksi smjera mrežnih ravnina, (hkl) , su maksimalno (pozitivnim brojem) skraćeni koeficijenti vektora normale jedne ravnine promatranog smjera.

Zadatak

Odredite opći, parametaraski i segmentni oblik jednadžbe one ravnine smjera $(30\bar{5})$ koja je najbliža ishodištu.

Zadatak

Odredite opći oblik jednadžbe ravnine kojoj su parametarske jednadžbe $x = 1 - t + s$, $y = 3$, $z = 2 + 3s$ ($t, s \in \mathbb{R}$). Navedite koordinate triju nekolinearnih točaka u toj ravnini!

Zadatak

Odredite opći oblik jednadžbe ravnine kojoj su parametarske jednadžbe $x = 1 - t + s$, $y = 3$, $z = 2 + 3s$ ($t, s \in \mathbb{R}$). Navedite koordinate triju nekolinearnih točaka u toj ravnini!

Zadatak

Koliko iznose stvarne duljine odsječaka ravnine $2x - 5y + 3z = 15$ na koordinatnim osima, ako je $a = 1$ m, $b = 2$ m i $c = 4$ m, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$?

Zadatak

Odredite opći oblik jednadžbe ravnine kojoj su parametarske jednadžbe $x = 1 - t + s$, $y = 3$, $z = 2 + 3s$ ($t, s \in \mathbb{R}$). Navedite koordinate triju nekolinearnih točaka u toj ravnini!

Zadatak

Koliko iznose stvarne duljine odsječaka ravnine $2x - 5y + 3z = 15$ na koordinatnim osima, ako je $a = 1$ m, $b = 2$ m i $c = 4$ m, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$?

Kako sve možemo zadati pravac u prostoru? Koji su oblici jednadžbi pravca u prostoru?

Parametarske jednadžbe pravca u prostoru

$$x = x_0 + u t, \quad y = y_0 + v t, \quad z = z_0 + w t$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) jedna točka na pravcu, a $\vec{s} = [u, v, w]$ jedan njegov vektor smjera. Skraćeni zapis zove se kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}.$$

Parametarske jednadžbe pravca u prostoru

$$x = x_0 + u t, \quad y = y_0 + v t, \quad z = z_0 + w t$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) jedna točka na pravcu, a $\vec{s} = [u, v, w]$ jedan njegov vektor smjera. Skraćeni zapis zove se kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}.$$

Zadatak

Zapišite parametarske jednadžbe pravca paralelnog s x-osi koji prolazi kroz točku (1, 2, 3).

Parametarske jednadžbe pravca u prostoru

$$x = x_0 + u t, \quad y = y_0 + v t, \quad z = z_0 + w t$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) jedna točka na pravcu, a $\vec{s} = [u, v, w]$ jedan njegov vektor smjera. Skraćeni zapis zove se kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}.$$

Zadatak

Zapišite parametarske jednadžbe pravca paralelnog s x-osi koji prolazi kroz točku $(1, 2, 3)$.

Zadatak

Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina $x + y + z = 1$ i $2x - y = 5$.

Kako određujemo probodište pravca i ravnine?

Parametarske jednadžbe pravca u prostoru

$$x = x_0 + u t, \quad y = y_0 + v t, \quad z = z_0 + w t$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) jedna točka na pravcu, a $\vec{s} = [u, v, w]$ jedan njegov vektor smjera. Skraćeni zapis zove se kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}.$$

Zadatak

Zapišite parametarske jednadžbe pravca paralelnog s x-osi koji prolazi kroz točku $(1, 2, 3)$.

Zadatak

Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina $x + y + z = 1$ i $2x - y = 5$.

Kako određujemo probodište pravca i ravnine? Koji su mogući međusobni položaji pravca i ravnine i kako ih ispituujemo?

Parametarske jednadžbe pravca u prostoru

$$x = x_0 + u t, \quad y = y_0 + v t, \quad z = z_0 + w t$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) jedna točka na pravcu, a $\vec{s} = [u, v, w]$ jedan njegov vektor smjera. Skraćeni zapis zove se kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}.$$

Zadatak

Zapišite parametarske jednadžbe pravca paralelnog s x-osi koji prolazi kroz točku $(1, 2, 3)$.

Zadatak

Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina $x + y + z = 1$ i $2x - y = 5$.

Kako određujemo probodište pravca i ravnine? Koji su mogući međusobni položaji pravca i ravnine i kako ih ispitujeemo? Kako

Parametarske jednadžbe pravca u prostoru

$$x = x_0 + u t, \quad y = y_0 + v t, \quad z = z_0 + w t$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) jedna točka na pravcu, a $\vec{s} = [u, v, w]$ jedan njegov vektor smjera. Skraćeni zapis zove se kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}.$$

Zadatak

Zapišite parametarske jednadžbe pravca paralelnog s x-osi koji prolazi kroz točku $(1, 2, 3)$.

Zadatak

Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina $x + y + z = 1$ i $2x - y = 5$.

Kako određujemo probodište pravca i ravnine? Koji su mogući međusobni položaji pravca i ravnine i kako ih ispitujeemo? Kako

$$\Pi \dots Ax + By + Cz = D \quad \vec{n} = [A, B, C]^*$$

$$p \dots (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{s} = [u, v, w]$$

$$q \dots (x'_0, y'_0, z'_0), \quad \vec{s}' = [u', v', w']$$

- $p \parallel \Pi$ (uključivo mogućosti da je sadržan u njoj) ako je $\vec{n} \perp \vec{c}$; u tom slučaju je $\angle(p, \Pi) := 0$. Inače je $\angle(p, \Pi) := 90^\circ - \angle(\vec{n}, \vec{s})$. Imaju li p i Π zajedničkih točaka utvrđuje se rješavanjem sustava koji se sastoji od njihovih jednažbi.

$$\Pi \dots Ax + By + Cz = D \quad \vec{n} = [A, B, C]^*$$

$$p \dots (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{s} = [u, v, w]$$

$$q \dots (x'_0, y'_0, z'_0), \quad \vec{s}' = [u', v', w']$$

- $p \parallel \Pi$ (uključivo mogućosti da je sadržan u njoj) ako je $\vec{n} \perp \vec{c}$; u tom slučaju je $\angle(p, \Pi) := 0$. Inače je $\angle(p, \Pi) := 90^\circ - \angle(\vec{n}, \vec{s})$. Imaju li p i Π zajedničkih točaka utvrđuje se rješavanjem sustava koji se sastoji od njihovih jednadžbi.
- Ako su $\vec{s}$ i $\vec{s}'$ kolinearne, p i q se ili podudaraju ili su različiti paralelni pravci, a inače se sijeku u jednoj točki ili su mimoilazni.
- Ako sustav od 6 jednadžbi s 5 nepoznanica koji dobijemo uzimanjem parametarskih jednadžbi oba pravca ima rješenja, p i q se sijeku ili podudaraju, inače su paralelni ili mimoilazni.
- Kut između p i q je 0 ako su paralelni, a inače se definira kao kut između $\vec{s}$ i $\vec{s}'$.

Zadatak

Nadite pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x -os i sa z -osi zatvara kut od 45° , ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Koji kut taj pravac zatvara s y -osi?

Zadatak

Nadite pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x -os i sa z -osi zatvara kut od 45° , ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Koji kut taj pravac zatvara s y -osi?

- $O \in p \Rightarrow x = ut, y = vt$ i $z = wt$.

Zadatak

Nadite pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x -os i sa z -osi zatvara kut od 45° , ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Koji kut taj pravac zatvara s y -osi?

- $O \in p \Rightarrow x = ut, y = vt$ i $z = wt$.
- $[u, v, w] \perp \vec{a} \Rightarrow 0 = [u, v, w] \cdot \vec{a} = (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{a} = ua^2 \Rightarrow u = 0;$

Zadatak

Nadite pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x-os i sa z-osi zatvara kut od 45° , ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Koji kut taj pravac zatvara s y-osi?

- $O \in p \Rightarrow x = ut, y = vt \text{ i } z = wt.$
- $[u, v, w] \perp \vec{a} \Rightarrow 0 = [u, v, w] \cdot \vec{a} = (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{a} = ua^2 \Rightarrow u = 0;$
- $\vec{s} = [0, v, w] = v\vec{b} + w\vec{c}, \angle(\vec{s}, \vec{c}) = 45^\circ \Rightarrow$

$$(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{c} = |[0, v, w]| \cdot c \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow w c^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{v^2 b^2 + w^2 c^2}$$

$$\Rightarrow w^2 c^2 = (v^2 b^2 + w^2 c^2)/2, w^2 c^2 = v^2 b^2,$$

Zadatak

Nadite pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x-os i sa z-osi zatvara kut od 45° , ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Koji kut taj pravac zatvara s y-osi?

- $O \in p \Rightarrow x = ut, y = vt \text{ i } z = wt.$
- $[u, v, w] \perp \vec{a} \Rightarrow 0 = [u, v, w] \cdot \vec{a} = (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{a} = ua^2 \Rightarrow u = 0;$
- $\vec{s} = [0, v, w] = v\vec{b} + w\vec{c}, \angle(\vec{s}, \vec{c}) = 45^\circ \Rightarrow$

$$(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{c} = |[0, v, w]| \cdot c \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow w c^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{v^2 b^2 + w^2 c^2}$$

$$\Rightarrow w^2 c^2 = (v^2 b^2 + w^2 c^2)/2, w^2 c^2 = v^2 b^2, w = \pm \frac{3}{4} v.$$

Zadatak

Nadite pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x -os i sa z -osi zatvara kut od 45° , ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Koji kut taj pravac zatvara s y -osi?

- $O \in p \Rightarrow x = ut, y = vt \text{ i } z = wt.$
- $[u, v, w] \perp \vec{a} \Rightarrow 0 = [u, v, w] \cdot \vec{a} = (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{a} = ua^2 \Rightarrow u = 0;$
- $\vec{s} = [0, v, w] = v\vec{b} + w\vec{c}, \angle(\vec{s}, \vec{c}) = 45^\circ \Rightarrow$

$$(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{c} = |[0, v, w]| \cdot c \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow w c^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{v^2 b^2 + w^2 c^2}$$

$$\Rightarrow w^2 c^2 = (v^2 b^2 + w^2 c^2)/2, w^2 c^2 = v^2 b^2, w = \pm \frac{3}{4} v.$$

- Dva rješenja: $x = 0, y = 4t, z = 3t$; $x = 0, y = 4t, z = -3t$