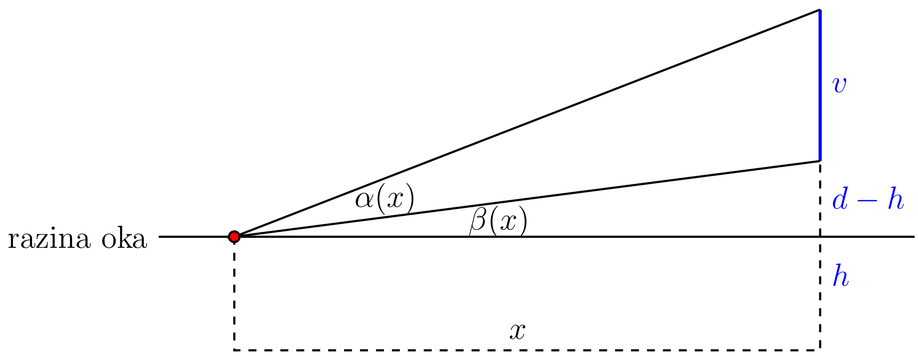
5. (15) Jedan od prvih značajnih renesansnih matematičara bio je Johann Müller poznat kao Regiomontanus (1436.–1476.). On je godine 1471. postavio problem koji nosi ime po njemu i koji se obično formulira kao ,,problem viseće slike“:

Na vertikalnom zidu visi slika visine v. Na kojoj udaljenosti od slike treba stajati promatrač tako da ju vidi što bolje, tj. pod najvećim mogućim kutom? Pritom se smatra da su poznate visina oka promatrača h i visina dna slike d.

Riješite Regiomontanusov problem viseće slike ako je $v = 1{,}00\,\mathrm{m}$, $h = 1{,}75\,\mathrm{m}$ i $d = 2{,}00\,\mathrm{m}$!

Rješenje. Neka je tražena udaljenost x, a kut pod kojim promatrač vidi sliku α, dakle želimo maksimizirati α u ovisnosti o x. Skiciramo li situaciju (za $d > h$ jer je tako u našoj situaciji) imamo:



Vidimo da vrijedi

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{v+d-h}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{d-h}{x}, \quad 0 < \alpha, \beta < 90^\circ.$$

Na intervalu $I = \langle 0, 90^\circ$ tangens je rastući i injektivan pa imamo

$$\alpha(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{v+d-h}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{d-h}{x}\right)$$

pa je

$$\alpha'(x) = \frac{d-h}{(d-h)^2+x^2} - \frac{v+d-h}{(v+d-h)^2+x^2}.$$

Funkcija $\alpha(x)$ je derivabilna na cijeloj domeni I pa su joj jedine kritične točke stacionarne točke. Jedino rješenje jednadžbe $\alpha'(x) = 0$ u I je $x_0 = +\sqrt{(d-h)(v+d-h)}$ te je to jedina kritična točka funkcije α. Za nju se može formalno dokazati da se radi o točki maksimuma, no iz same postave problema i činjenice da ako je promatrač jako daleko je α blizu 0, kako i ako je jako blizu slike je očito da se radi o točki maksimuma. Dakle, tražena udaljenost je $x_0 = \sqrt{(d-h)(v+d-h)} = \sqrt{0.25 \cdot 1.25}\,\mathrm{m} = 0.559\,\mathrm{m}$.

6. (15) U kristalografiji se os zone definira kao pravac koji prolazi kroz ishodište i koji je paralelan smjerovima dviju mrežnih ravnina (za njih kažemo da određuju jednu zonu). Ako su parametri kristalografske baze $a = b = 100\,\mathrm{pm}$, $c = 200\,\mathrm{pm}$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$, izračunajte kutove koje os zone određene smjerovima koji imaju Millerove indekse (301) i $(1\bar{1}1)$ zatvara s koordinatnim osima!

Rješenje. Ravnine smjera (301) imaju vektor normale $\vec{n}_1 = [3, 0, 1]^*$, a ravnine smjera $(1\bar{1}1)$ imaju vektor normale $\vec{n}_2 = [1, -1, 1]^*$. Os zone treba biti paralelna obama smjerovima, dakle vektor $\vec{s}$ smjera osi zone treba biti okomit i na $\vec{n}_1$ i na $\vec{n}_2$. Bilo iz $\vec{s} \cdot \vec{n}_1 = \vec{s} \cdot \vec{n}_2 = 0$ bilo iz $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ dobivamo da je $\vec{s} = [1, -2, -3]$ (ili neki drugi vektor s koordinatama proporcionalnim tima). U zadatku se traže kutevi φ, ψ, ω između osi zone, tj. vektora $\vec{s}$, s koordinatnim osima, tj. s vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Po definiciji skalarnog produkta je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s} \cdot \vec{a}}{s\,a}$$

i analogno za kutove ψ i ω. Dakle, trebaju nam skalarni produkti od $\vec{s}$ s $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ te duljina s vektora $\vec{s}$. Imamo

$$\vec{s} \cdot \vec{a} = (\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot \vec{a} = a^2 - 2a\,b\cos\gamma = 20000\,\mathsf{pm}^2$$

i analogno $\vec{s} \cdot \vec{b} = -25000\,\mathsf{pm}^2$ i $\vec{s} \cdot \vec{c} = -120000\,\mathsf{pm}^2$. Nadalje,

$$s = \sqrt{\vec{s} \cdot \vec{s}} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c})} \approx 655{,}74385\,\mathrm{pm}.$$

Stoga je

$$\cos\varphi \approx 0.304997, \quad \cos\psi \approx -0{,}381246, \quad \cos\omega \approx -0{,}914991,$$

odnosno

$$\varphi \approx 72°14', \quad \psi \approx 112°24', \quad \omega \approx 156°12'.$$

5. (20) U renesansi se, posebice u navigaciji u kojoj su se intenzivno koristile trigonometrijske tablice, zbog nedostatka računskih pomagala pojavila potreba za osmišljavanjem tablice kojom bi se množenje i dijeljenje višeznamenkastih brojeva svelo na zbrajanje i oduzimanje. Prvi koji je to uspio postiči bio je škotski velikaš John Napier (1550.–1617.). On je 1614. objavio svoju tablicu logaritama pod naslovom *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Pet godina, posthumno, objavljen je i opis metode kojom je dobio svoju tablicu logaritama.

Napier je svoj logaritam definirao ovako: Dvije čestice, A i G, kreću se pravocrtno, svaka po svom pravcu. Obje kreću u istom trenu. Čestica A giba se jednoliko, konstantnom brzinom 10^7.[1] Čestica G giba se od početne točke T do konačne točke S, čiji razmak je 10^7, tako da joj je početna brzina 10^7 i tako da joj je u svakom trenutku brzina proporcionalna udaljenosti do cilja S. Uz te uvjete je u svakom trenutku udaljenost koju je A prešla *logaritam* udaljenosti koju G još treba prijeći.

(a) (5) Dokažite da udaljenosti y_n koje je A prešla do trenutaka $n \in \mathbb{N}_0$ čine aritmetički niz, a da udaljenosti x_n koje G još treba prijeći u trenucima n čine geometrijski niz.

(b) (10) Ako Napierov *logaritam* označimo s NapLog, izvedite modernu formulu za funkciju NapLog i skicirajte njen graf.

(c) (5) Koji kubni polinom najbolje aproksimira $\operatorname{NapLog} x$ za x blizu 10^7?

Rješenje.
(a)&(b) Budući da je gibanje od A jednoliko brzinom 10^7, znači da je do trenutka n A prešla udaljenost $y_n = 10^7\, n$, tj. (y_n) je aritmetički niz s početnim članom 0 i diferencijom 10^7. U trenutku n brzina od G je $k\, x_n$. Pritom je za $n = 0$ $x_0 = 10^7$, dakle je $k = 1$, odnosno u trenutku n je brzina od G jednaka $v_n = x_n$ (a i u svakom drugom trenutku je $v = t$), tj. brzine od G čine aritmetički niz s početnim članom 10^7 i diferencijom 1. Do trenutka n, G je prešla udaljenost $10^7 - x_n$, pa je u svakom trenutku (ne samo n-tom) $v = -\dot{x}$, dakle je $x = -\dot{x}$. Rješavanje separacijom varijabli daje $\ln x = -t + K$, odnosno $x = C\,\exp(-t)$, dakle je $x_n = C\,\exp(-n)$, odnosno (x_n) je geometrijski niz

[1] Broj 10^7 se ovdje pojavljuje jer je Napier htio logaritmirati sinuse, a tadašnje najtočnije tablice sinusa bile su računate u odnosu na kružnicu polumjera 10^7, što je ekvivalentno modernoj točnosti na 7 decimala.

s početnim članom $C = x_0 = 10^7$ i kvocijentom $q = \frac{1}{e}$. Uspust smo dobili $t = \ln C - \ln x = \ln \frac{10^7}{x}$ i $y(t) = 10^7\, t$, dakle je

$$y(x) = \operatorname{NapLog} x = 10^7 \, \ln \frac{10^7}{x}.$$

Transformacijama grafa funkcije ln lako se dobije graf funkcije NapLog.
(c) Traženi polinom je

$$T_3(x) = -(x - 10^7) + \frac{1}{2 \cdot 10^7}(x - 10^7)^2 - \frac{1}{3 \cdot 10^{14}}(x - 10^7)^3 =$$

$$= \frac{5{,}5 \cdot 10^7}{3} - 3x + \frac{3}{2{,}0 \cdot 10^7}x^2 - \frac{1}{3 \cdot 10^{14}}x^3.$$

Možemo ga dobiti bilo korištenjem definicije Taylorovog polinoma oko $c = 10^7$ bilo prikladnim transformacijama Maclaurinovog reda za $\ln(1 + x)$.