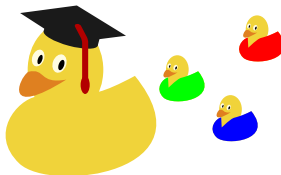


1. tema: Sustavi linearnih jednadžbi

Franka Miriam Brückler



Linearne jednadžbe

Zadatak

Zbog inflacije, cijena kruha je u posljednjih pet godina porasla za 58 %. Ako je mali bijeli kruh prije pet godina koštao 6,50 kuna te ako znamo da je pri zamjeni kuna u eure fiksni tečaj konverzije bio 7,53450 kuna za 1 euro, kolika je cijena malog bijelog kruha danas?

Linearne jednadžbe

Zadatak

Zbog inflacije, cijena kruha je u posljednjih pet godina porasla za 58 %. Ako je mali bijeli kruh prije pet godina koštao 6,50 kuna te ako znamo da je pri zamjeni kuna u eure fiksni tečaj konverzije bio 7,53450 kuna za 1 euro, kolika je cijena malog bijelog kruha danas?

Zadatak

Koja je razlika između $f(x) = 2x - 5$ i $2x - 5 = 0$?

Linearne jednadžbe

Zadatak

Zbog inflacije, cijena kruha je u posljednjih pet godina porasla za 58 %. Ako je mali bijeli kruh prije pet godina koštao 6,50 kuna te ako znamo da je pri zamjeni kuna u eure fiksni tečaj konverzije bio 7,53450 kuna za 1 euro, kolika je cijena malog bijelog kruha danas?

Zadatak

Koja je razlika između $f(x) = 2x - 5$ i $2x - 5 = 0$?

Zadatak

Što predstavlja jednadžba $3x - 7y = 8$? Navedite tri njena rješenja (ako ih postoje tri, inače koliko ih ima)!

Definicija

Linearna jednadžba s nepoznicama $x, y, \dots$ je jednadžba koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = \heartsuit$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednadžbe), a $\heartsuit$ je konstantna (slobodni član jednadžbe). Linearne jednadžbe kojima je slobodni član 0 zovu se *homogene*.

Definicija

Linearna jednačba s nepoznaticama $x, y, \dots$ je jednačba koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = \heartsuit$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednačbe), a $\heartsuit$ je konstantna (slobodni član jednačbe). Linearne jednačbe kojima je slobodni član 0 zovu se *homogene*. *Rješenje* linearne jednačbe je broj, uređen par brojeva, uređena trojka brojeva, $\dots$ čije uvrštavanje u jednačbu daje istinitu numeričku jednakost.

Definicija

Linearna jednačina s nepoznicama $x, y, \dots$ je jednačina koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = \heartsuit$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednačine), a i $\heartsuit$ je konstantna (slobodni član jednačine). Linearne jednačine kojima je slobodni član 0 zovu se *homogene*. *Rješenje* linearne jednačine je broj, uređen par brojeva, uređena trojka brojeva, ... čije uvrštavanje u jednačinu daje istinitu numeričku jednakost.

Koliko rješenja mogu imati linearne jednačine s jednom nepoznicom?

Definicija

Linearna jednačina s nepoznicama $x, y, \dots$ je jednačina koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = \heartsuit$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednačine), a $\heartsuit$ je konstantna (slobodni član jednačine). Linearne jednačine kojima je slobodni član 0 zovu se *homogene*. *Rješenje* linearne jednačine je broj, uređen par brojeva, uređena trojka brojeva, ... čije uvrštavanje u jednačinu daje istinitu numeričku jednakost.

Koliko rješenja mogu imati linearne jednačine s jednom nepoznicom? S dvije?

Definicija

***Linearna jednadžba** s nepoznicama $x, y, \dots$ je jednadžba koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = \heartsuit$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednadžbe), a $\heartsuit$ je konstantna (slobodni član jednadžbe). Linearne jednadžbe kojima je slobodni član 0 zovu se **homogene**. **Rješenje** linearne jednadžbe je broj, uređen par brojeva, uređena trojka brojeva, $\dots$ čije uvrštavanje u jednadžbu daje istinitu numeričku jednakost.*

Koliko rješenja mogu imati linearne jednadžbe s jednom nepoznicom? S dvije? S tri?

Definicija

*Linearna jednačžba s nepoznicama $x, y, \dots$ je jednačžba koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = \heartsuit$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednačžbe), a $\heartsuit$ je konstantna (slobodni član jednačžbe). Linearne jednačžbe kojima je slobodni član 0 zovu se **homogene**. **Rješenje** linearne jednačžbe je broj, uređen par brojeva, uređena trojka brojeva, $\dots$ čije uvrštavanje u jednačžbu daje istinitu numeričku jednakost.*

Koliko rješenja mogu imati linearne jednačžbe s jednom nepoznicom? S dvije? S tri? Kako ih geometrijski interpretiramo?

Definicija

Linearna jednadžba s nepoznicama $x, y, \dots$ je jednadžba koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = c$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednadžbe), a i c je konstantna (slobodni član jednadžbe). Linearne jednadžbe kojima je slobodni član 0 zovu se **homogene**. **Rješenje** linearne jednadžbe je broj, uređen par brojeva, uređena trojka brojeva, ... čije uvrštavanje u jednadžbu daje istinitu numeričku jednakost.

Koliko rješenja mogu imati linearne jednadžbe s jednom nepoznicom? S dvije? S tri? Kako ih geometrijski interpretiramo?

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$. Čine li oni bazu prostora V^3 ?

Definicija

Linearna jednadžba s nepoznicama $x, y, \dots$ je jednadžba koja se može zapisati u obliku $ax + by + \dots = \heartsuit$, gdje su $a, b, \dots$ konstante (koeficijenti jednadžbe), a $\heartsuit$ je konstantna (slobodni član jednadžbe). Linearne jednadžbe kojima je slobodni član 0 zovu se **homogene**. **Rješenje** linearne jednadžbe je broj, uređen par brojeva, uređena trojka brojeva, ... čije uvrštavanje u jednadžbu daje istinitu numeričku jednakost.

Koliko rješenja mogu imati linearne jednadžbe s jednom nepoznicom? S dvije? S tri? Kako ih geometrijski interpretiramo?

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$. Čine li oni bazu prostora V^3 ? Koje su koordinate vektora $\vec{s} = [2, -6, 4]$ u bazi $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

Definicija

*Sustav linearnih jednadžbi je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Ako sustav ima m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, zovemo ga $m \times n$ -sustavom. Rješenje sustava je svaka uređena n -torka brojeva koja zadovoljava sve jednadžbe sustava. Sustavi kojima su svi slobodni članovi jednaki nuli zovu se **homogeni sustavi**, a ostali se zovu nehomogeni sustavi.*

Definicija

*Sustav linearnih jednadžbi je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Ako sustav ima m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, zovemo ga $m \times n$ -sustavom. Rješenje sustava je svaka uređena n -torka brojeva koja zadovoljava sve jednadžbe sustava. Sustavi kojima su svi slobodni članovi jednaki nuli zovu se **homogeni sustavi**, a ostali se zovu nehomogeni sustavi.*

Zadatak

Postavite opći oblik sustava za promjenu koordinata vektora iz V^3 . Koji problem bi rješavao zadatak: U ovisnosti o λ , μ i η riješi sustav:

$$2x + y - z = \lambda,$$

$$-x - 3y + 2z = \mu,$$

$$3x + 2y - 4z = \eta.$$

Metoda supstitucije

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese NaCl i KCl te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.

Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

$$M_{\text{NaCl}} = 58,45 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{KCl}} = 74,56 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{AgCl}} = 143,34 \text{ g mol}^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g.}$$

Metoda supstitucije

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese NaCl i KCl te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.

Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

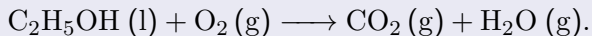
$$M_{\text{NaCl}} = 58,45 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{KCl}} = 74,56 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{AgCl}} = 143,34 \text{ g mol}^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g.}$$

$$x = 0,2474 \text{ g}, y = 0,3716 \text{ g}$$

Primjer

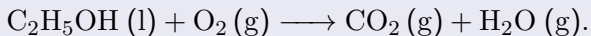
Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:



Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!

Primjer

Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:



Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!

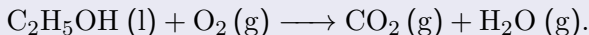
$$\text{C} : 2x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} - x_{\text{CO}_2} = 0$$

$$\text{H} : 6x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} - 2x_{\text{H}_2\text{O}} = 0 \quad .$$

$$\text{O} : x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + 2x_{\text{O}_2} - 2x_{\text{CO}_2} - x_{\text{H}_2\text{O}} = 0$$

Primjer

Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:

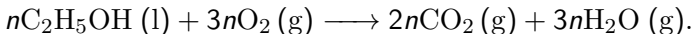
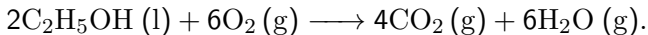
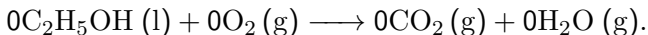
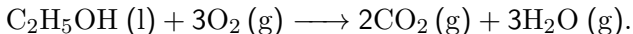


Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!

$$\text{C : } 2x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} - x_{\text{CO}_2} = 0$$

$$\text{H : } 6x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} - 2x_{\text{H}_2\text{O}} = 0 \quad .$$

$$\text{O : } x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + 2x_{\text{O}_2} - 2x_{\text{CO}_2} - x_{\text{H}_2\text{O}} = 0$$



Geometrijska interpretacija linearnih sustava

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav?

Geometrijska interpretacija linearnih sustava

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa
 $m \times 2$ za $m > 2$?

Geometrijska interpretacija linearnih sustava

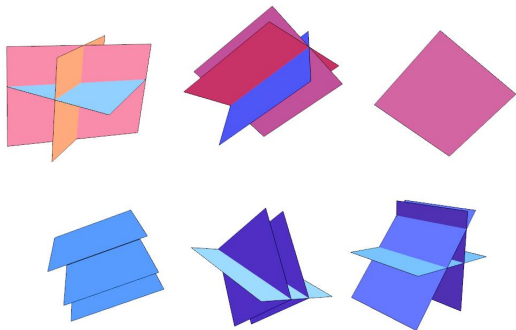
Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa
 $m \times 2$ za $m > 2$? A 2×3 -sustav?

Geometrijska interpretacija linearnih sustava

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa
 $m \times 2$ za $m > 2$? A 2×3 -sustav? A 3×3 -sustav?

Geometrijska interpretacija linearnih sustava

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja? Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa $m \times 2$ za $m > 2$? A 2×3 -sustav? A 3×3 -sustav? Što je s $m \times 3$ -sustavima?



Teorem

Svaki sustav linearnih jednadžbi ima ili jedinstveno rješenje ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja.

Teorem

Svaki sustav linearnih jednadžbi ima ili jedinstveno rješenje ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja.

Zadatak

Sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice nije linearan:

$$x + y = 2, \quad xy = -3$$

Riješite ga!

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?
- Kad zbrojimo dvije jednadžbe, koji efekt to ima na njihove koeficijente uz pojedine nepoznanice i na slobodne članove?

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?
- Kad zbrojimo dvije jednadžbe, koji efekt to ima na njihove koeficijente uz pojedine nepoznanice i na slobodne članove?

Dogovor: Uredno zapisan sustav linearnih jednadžbi je onaj u kojem su sve nepoznanice na lijevim stranama jednakosti, slobodni članovi na desnim, a na lijevoj strani su istoimene nepoznanice potpisane jedna ispod druge.

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?
- Kad zbrojimo dvije jednadžbe, koji efekt to ima na njihove koeficijente uz pojedine nepoznanice i na slobodne članove?

Dogovor: Uredno zapisan sustav linearnih jednadžbi je onaj u kojem su sve nepoznanice na lijevim stranama jednakosti, slobodni članovi na desnim, a na lijevoj strani su istoimene nepoznanice potpisane jedna ispod druge. Uvodimo sljedeće oznake:

- koeficijent uz j -tu nepoznanicu u i -toj po redu jednadžbi označavamo s a_{ij} ;
- slobodni član u i -toj po redu jednadžbi označavamo s b_i .

Definicija

Matrica sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

je tablica oblika

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Zadatak

Zapišite matrice svih prethodnih linearnih sustava iz ove prezentacije.

Zadatak

Zapišite matrice svih prethodnih linearnih sustava iz ove prezentacije. Koje sustave predstavljaju matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)?$$

- Čemu odgovaraju retci matrice sustava?
- Čemu odgovaraju stupci matrice sustava?
- Što predstavlja okomita crta?

Gaußova metoda eliminacija

Koji tip sustava linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice je najlakše riješiti? Poopćite zaključak na n nepoznanica!

Gaußova metoda eliminacija

Koji tip sustava linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice je najlakše riješiti? Poopćite zaključak na n nepoznanica! Cilj Gaußove metode eliminacija je matricu sustava svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje, dakle cilj nam je dobiti matricu kojoj su u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali (pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca) jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule.

Gaußova metoda eliminacija

Koji tip sustava linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice je najlakše riješiti? Poopćite zaključak na n nepoznanica! Cilj Gaußove metode eliminacija je matricu sustava svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje, dakle cilj nam je dobiti matricu kojoj su u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali (pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca) jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule.

Dovoljno je poništiti elemente ispod i iznad dijagonale, tj. nije nužno inzistirati da na dijagonali dobijemo jedinice. Zašto?

Gaußova metoda eliminacija

Koji tip sustava linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice je najlakše riješiti? Poopćite zaključak na n nepoznanica! Cilj Gaußove metode eliminacija je matricu sustava svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje, dakle cilj nam je dobiti matricu kojoj su u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali (pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca) jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule.

Dovoljno je poništiti elemente ispod i iznad dijagonale, tj. nije nužno inzistirati da na dijagonali dobijemo jedinice. Zašto?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & = b_2 \\ & \vdots & = \vdots \\ & a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & b_1/a_{11} \\ & x_2 & = b_2/a_{22} \\ & \vdots & = \vdots \\ & x_n & = b_n/a_{nn} \end{array} \right.$$

Elementarne transformacije

Kako želimo pojednostaviti sustav u oblik što sličniji gornjem, ali tako da ne promijenimo skup njegovih rješenja, očito ne možemo primjenjivati sasvim proizvoljne operacije.

Definicija

*Dozvoljene operacije smijemo primijeniti na matricu sustava bez da time promijenimo skup rješenja sustava zovu se **elementarne transformacije**. Ima ih tri:*

- *Zamjena dva retka (član po član);*
- *Množenje nekog retka brojem koji nije nula (množenje svih članova retka tim brojem);*
- *Pribrajanje jednog retka drugom (član po član).*

Tim operacijama se doduše mijenja matrica sustava, ali ne i skup rješenja. Između uzastopnih matrica koje dobivamo elementarnim transformacijama pišemo znak $\sim$.

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima? Što ako koristeći elementarne transformacije nađemo na redak u kojem su svi brojevi nula?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima? Što ako koristeći elementarne transformacije nađemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako nađemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima? Što ako koristeći elementarne transformacije nađemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako nađemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula? A ako nađemo na redak u kojemu su svi brojevi osim zadnjega (desno od crte) nula?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima?

Što ako koristeći elementarne transformacije nađemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako nađemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula? A ako nađemo na redak u kojemu su svi brojevi osim zadnjega (desno od crte) nula?

Sustave linearnih jednadžbi bez rješenja prepoznamo tako što u nekom trenutku uzastopne primjene elementarnih transformacija kao neki od redaka matrice sustava dobijemo redak oblika

$$(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \mid \spadesuit)$$

$$s \spadesuit \neq 0.$$

Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje?

Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje? Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje (sve nepoznanice jednake 0). To rješenje $(0, 0, \dots, 0)$ naziva se **trivijalnim rješenjem** homogenog sustava.

Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje? Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje (sve nepoznanice jednake 0). To rješenje $(0, 0, \dots, 0)$ naziva se **trivijalnim rješenjem** homogenog sustava. Uz konvenciju brisanja nulredaka, ako se pojave tijekom računa, **sustav linearnih jednadžbi s jedinstvenim rješenjem** prepoznat ćemo po tome što ćemo matricu sustava elementarnim transformacijama uspjeti svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \end{array} \right).$$

U ovom slučaju rješenje polaznog sustava je n -torka $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Može li sustav s manje jednadžbi nego nepoznanica imati jedinstveno rješenje?

Zadatak

Riješite sustav

$$x + y + z = 1, \quad 2x - y = 2$$

i supstitucijom i pomoću elementarnih transformacija matrice sustava.

Zadatak

Riješite sustav

$$x + y + z = 1, \quad 2x - y = 2$$

i supstitucijom i pomoću elementarnih transformacija matrice sustava.

Sustav linearnih jednadžbi s beskonačno mnogo rješenja će se u pravilu (osim kad se pojavi i neki nulstupac) elementarnim transformacijama moći svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_k \end{array} \right).$$

Pritom su sa $\heartsuit$ i $X_1, \dots, X_k$ označeni bilo kakvi brojevi. Pritom imamo bar jedan stupac tipa $\heartsuit$ — takve stupce zvat ćemo „umetnuti stupci” (ili bar jedan nulstupac lijevo od okomite crte).

Iako je načelno dozvoljeno provođenje elementarnih transformacija u bilo kojem redoslijedu, postoji algoritam koji daje redoslijed koji je za većinu sustava najefikasniji. Taj algoritam zove se **Gaußova (Gauß-Jordanova) metoda eliminacija**. Pritom pozicije matrice sustava označavamo s (i, j) : i -ti redak, j -ti stupac. Nadalje, iako time mijenjamo broj jednadžbi sustava, ali ne i njegova rješenja, dozvolit ćemo brisanje nulredaka iz matrice sustava. Algoritam Gaußove metode eliminacija je sljedeći (na početku je $i = 1$):

- 1 Uzmi sljedeći po redu (i -ti) stupac. Ako je to nulstupac, povećaj i za 1 pa gledaj odgovarajući stupac. Ako bi trebalo uzeti stupac slobodnih članova, STOP — gotovo je.
- 2 Ako je na dijagonalnoj poziciji (i, i) nula, zamjenom i -tog retka s nekim retkom *ispod* njega dovedi broj različit od nule na tu poziciju. Ako to ne možeš postići, STOP — gotovo je.
- 3 Pomoću broja na poziciji (i, i) (pivotni element) poništi ostatak stupca: Svakom retku u kojem iznad/ispod pivotnog elementa nije 0, pribroji odgovarajući višekratnik i -tog retka.
- 4 Ukoliko si dobio kontradiktornu jednadžbu, STOP — sustav nema rješenja.
- 5 Ukoliko si dobio nulredak, možeš ga pobrisati iz matrice sustava.
- 6 Povećaj i za 1 i vrati se na prvi korak.

Ukoliko je postupak stao iz razloga navedenih u prva dva koraka, sve retke u kojima je na poziciji (i, i) broj različit od 1 podijelimo tim brojem i na kraju očitamo rješenje.

Primjer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) ?!$$

Primjer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) ?!$$

$$(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) +(-5/3) \cdot I. \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array} \right)$$

Primjer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) ?!$$

$$(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) + (-5/3) \cdot I. \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array} \right)$$

ili

$$(2) \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) : 6 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) - 10I. \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array} \right)$$

iii

$$(3) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} .5 \\ .3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 30 & 3 & 0 & -3 \end{array} \right) -I. \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 0 & -7 & 5 & -38 \end{array} \right)$$

ili

$$(3) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 30 & 3 & 0 & -3 \end{array} \right) -I. \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 0 & -7 & 5 & -38 \end{array} \right)$$

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite 4. zadatak iz ove prezentacije.