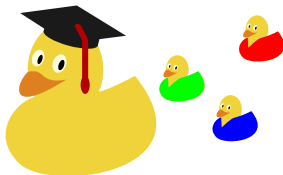


### 3. tema: Unitarni prostori

*Franka Miriam Brückler*

---



# Pojam unitarnog prostora

**Unitarni prostor** je vektorski prostor na kojem je dodatno definirana operacija  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalarnog produkta koja po dvama vektorima pridružuje skalar, a pritom ima ista svojstva kao već otprije poznati skalarni produkt geometrijskih vektora.

# Pojam unitarnog prostora

**Unitarni prostor** je vektorski prostor na kojem je dodatno definirana operacija  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalarnog produkta koja po dvama vektorima pridružuje skalar, a pritom ima ista svojstva kao već otprije poznati skalarni produkt geometrijskih vektora. Iznimno, na kompleksnim vektorskim prostorima skalarni produkt nije komutativan.

# Pojam unitarnog prostora

**Unitarni prostor** je vektorski prostor na kojem je dodatno definirana operacija  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalarnog produkta koja po dvama vektorima pridružuje skalar, a pritom ima ista svojstva kao već otprije poznati skalarni produkt geometrijskih vektora. Iznimno, na kompleksnim vektorskim prostorima skalarni produkt nije komutativan.

## Standardni skalarni produkti

- Na prostorima geometrijskih vektora:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = v w \cos \angle(\vec{v}, \vec{w})$ ;
- Na  $\mathbb{R}^n$ :  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ ;
- Na prostoru integrabilnih realnih funkcija na nekom intervalu  $I$  (ili na  $C(I)$ ,  $C^1(I)$ ):  $\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx$ ;
- Na  $\mathbb{C}$  kao realnom prostoru:  $\langle x + y i, x' + y' i \rangle = x x' + y y'$ , a na  $\mathbb{C}$  kao kompleksnom prostoru:  $\langle z, w \rangle = \bar{z} w$

# Ortogonalnost i norma

Za vektore iz unitarnih prostora definiramo

$$v \perp w :\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0,$$

$$\|v\| := +\sqrt{\langle v, v \rangle}$$

## Ortogonalnost i norma

Za vektore iz unitarnih prostora definiramo

$$v \perp w :\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0,$$

$$\|v\| := +\sqrt{\langle v, v \rangle}$$

### Zadatak

Izračunajte normu vektora  $v = (-1, 2, 0, 5) \in \mathbb{R}^4$ . Nađite jedan vektor  $w$  ortogonalan na njega.

### Zadatak

Izračunajte normu funkcije  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \exp(-x)$ .

### Zadatak

Nađite primjer dviju ortogonalnih integrabilnih realnih funkcija  $f, g : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  koje nisu nulfunkcije.

## Teorem

*Ako je  $S$  skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna, onda je  $S$  linearno nezavisan skup.*

Baza unitarnog prostora čija svaka dva vektora su ortogonalna naziva se **ortogonalnom bazom**. Ortogonalna baza u kojoj svi vektori imaju normu 1 naziva se **ortonormiranom bazom**.

## Primjer

*Kanonske baze za  $\mathbb{R}^n$  su ortonormirane.*

## Teorem

*Ako je  $S$  skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna, onda je  $S$  linearno nezavisan skup.*

Baza unitarnog prostora čija svaka dva vektora su ortogonalna naziva se **ortogonalnom bazom**. Ortogonalna baza u kojoj svi vektori imaju normu 1 naziva se **ortonormiranom bazom**.

## Primjer

*Kanonske baze za  $\mathbb{R}^n$  su ortonormirane.*

## Zadatak

*Ako  $\vec{v} \in V^3(O)$  s vektorima ortonormirane baze  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ima skalarne produkte redom iznosa  $-1, 5$  i  $2$ , koje su koordinate od  $\vec{v}$  u toj bazi?*

## Teorem

*Ako je  $S$  skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna, onda je  $S$  linearno nezavisan skup.*

Baza unitarnog prostora čija svaka dva vektora su ortogonalna naziva se **ortogonalnom bazom**. Ortogonalna baza u kojoj svi vektori imaju normu 1 naziva se **ortonormiranom bazom**.

## Primjer

*Kanonske baze za  $\mathbb{R}^n$  su ortonormirane.*

## Zadatak

*Ako  $\vec{v} \in V^3(O)$  s vektorima ortonormirane baze  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ima skalarne produkte redom iznosa  $-1, 5$  i  $2$ , koje su koordinate od  $\vec{v}$  u toj bazi?*

# Fundamentalni zakon recipročne rešetke

$$d_{hkl} \cdot \mathcal{N}_{hkl} = 1$$

# Fundamentalni zakon recipročne rešetke

$$d_{hkl} \cdot \mathcal{N}_{hkl} = 1$$

Zadatak

*Dokažite taj zakon!*

# Fundamentalni zakon recipročne rešetke

$$d_{hkl} \cdot \mathcal{N}_{hkl} = 1$$

Zadatak

*Dokažite taj zakon!*

Zadatak

*Dokažite:*

$$hkl \neq 0 \Rightarrow d_{hkl} = \frac{V}{|hkl| P_{\triangle MNP}},$$

*gdje su M, N i P redom probodišta ravnine  $hx + ky + lz = 1$  s koordinatnim osima.*

## Zadatak

Ako su parametri baze  $a = 100 \text{ pm}$ ,  $b = 200 \text{ pm}$ ,  $c = 250 \text{ pm}$ ,  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , izračunajmo  $d_{\bar{1}23}$  i kut kojeg normale smjera  $(\bar{1}23)$  zatvaraju s  $x$ -osi.

## Zadatak

Ako su parametri baze  $a = 100 \text{ pm}$ ,  $b = 200 \text{ pm}$ ,  $c = 250 \text{ pm}$ ,  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , izračunajmo  $d_{\bar{1}23}$  i kut kojeg normale smjera  $(\bar{1}23)$  zatvaraju s  $x$ -osi.

## Zadatak

Kristali berila kristaliziraju u heksagonskom sustavu ( $a = b = 9,21 \text{ \AA}$ ,  $c = 9,12 \text{ \AA}$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ ). Izračunajte  $d_{230}$ .

### Zadatak

Ako su parametri baze  $a = 100 \text{ pm}$ ,  $b = 200 \text{ pm}$ ,  $c = 250 \text{ pm}$ ,  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , izračunajmo  $d_{\bar{1}23}$  i kut kojeg normale smjera  $(\bar{1}23)$  zatvaraju s  $x$ -osi.

### Zadatak

Kristali berila kristaliziraju u heksagonskom sustavu ( $a = b = 9,21 \text{ \AA}$ ,  $c = 9,12 \text{ \AA}$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ ). Izračunajte  $d_{230}$ .

### Zadatak

Kako biste za ortogonalnu direktnu bazu od  $V^3(O)$  izračunali koordinate vektora njene recipročne baze u direktnoj bazi?

### Zadatak

Ako su parametri baze  $a = 100 \text{ pm}$ ,  $b = 200 \text{ pm}$ ,  $c = 250 \text{ pm}$ ,  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , izračunajmo  $d_{\bar{1}23}$  i kut kojeg normale smjera  $(\bar{1}23)$  zatvaraju s  $x$ -osi.

### Zadatak

Kristali berila kristaliziraju u heksagonskom sustavu ( $a = b = 9,21 \text{ \AA}$ ,  $c = 9,12 \text{ \AA}$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ ). Izračunajte  $d_{230}$ .

### Zadatak

Kako biste za ortogonalnu direktnu bazu od  $V^3(O)$  izračunali koordinate vektora njene recipročne baze u direktnoj bazi?

### Zadatak

Za bazu od  $V^2$  zadanu parametrima  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  formulama izrazite vektore ortonormirane baze  $(\vec{i}, \vec{j})$  uz uvjet da je  $\vec{i}$  istog smjera i orijentacije kao  $\vec{a}$ . Preračunajte koordinate jednog vektora iz prve u