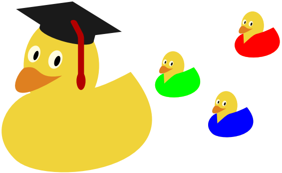
4. tema: Pojam linearnog operatora

Franka Miriam Brückler



Operatori skaliranja

- Kako smo u kontekstu realnih funkcija jedne varijable definirali linearne funkcije?

Operatori skaliranja

- Kako smo u kontekstu realnih funkcija jedne varijable definirali linearne funkcije?
- Funkcija koja sve elemente skupa množi s istim brojem (skalarom) ima smisla i kad je taj skup vektorski prostor:

Operatori skaliranja

- Kako smo u kontekstu realnih funkcija jedne varijable definirali linearne funkcije?
- Funkcija koja sve elemente skupa množi s istim brojem (skalarom) ima smisla i kad je taj skup vektorski prostor: Operator skaliranja (skalarom α) je funkcija $\hat{S}_\alpha : V \to V$ (gdje je V bilo kakav vektorski prostor) definirana sa

$$\hat{S}_\alpha(v) = \alpha\, v.$$

Operatori skaliranja

- Kako smo u kontekstu realnih funkcija jedne varijable definirali linearne funkcije?
- Funkcija koja sve elemente skupa množi s istim brojem (skalarom) ima smisla i kad je taj skup vektorski prostor: Operator skaliranja (skalarom α) je funkcija $\hat{S}_\alpha : V \to V$ (gdje je V bilo kakav vektorski prostor) definirana sa

$$\hat{S}_\alpha(v) = \alpha\, v.$$

- Geometrijski objasnite što radi $\hat{S}_{-2} : V^2(O) \to V^2(O)$.

Linearne funkcije s više varijabli

- Ako je U unitaran prostor, onda linearne funkcije jedne varijable na njega možemo poopćiti kao operatore skaliranja $\hat{S}_\alpha : U \to U$,

Linearne funkcije s više varijabli

- Ako je U unitaran prostor, onda linearne funkcije jedne varijable na njega možemo poopćiti kao operatore skaliranja $\hat{S}_\alpha : U \to U$, ali i kao linearne funkcije $f_a : U \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$)

$$f_a(v) = \langle a, v \rangle,$$

gdje je $a \in U$ fiksirani vektor.

Linearne funkcije s više varijabli

- Ako je U unitaran prostor, onda linearne funkcije jedne varijable na njega možemo poopćiti kao operatore skaliranja $\hat{S}_\alpha : U \to U$, ali i kao linearne funkcije $f_a : U \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$)

$$f_a(v) = \langle a, v \rangle,$$

  gdje je $a \in U$ fiksirani vektor. Ako je $\dim U = n$, govorimo o linearnoj funkciji s n varijabli.
- Opišite djelovanje $f_{\vec{0}} : V^3 \to \mathbb{R}$ i $f_{(-1,0,1,0)} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Definicija linearnog operatora

Ako u domeni i kodomeni neke funkcije F ima smisla zbrajati elemente i množiti ih skalarima,

Definicija linearnog operatora

Ako u domeni i kodomeni neke funkcije F ima smisla zbrajati elemente i množiti ih skalarima, dakle ako su domena i kodomena od F vektorski prostori, onda se možemo pitati kako se F ,,ponaša" s obzirom na te dvije algebarske operacije.

Definicija linearnog operatora

Ako u domeni i kodomeni neke funkcije F ima smisla zbrajati elemente i množiti ih skalarima, dakle ako su domena i kodomena od F vektorski prostori, onda se možemo pitati kako se F ,,ponaša" s obzirom na te dvije algebarske operacije. ,,Lijepo ponašanje" se onda naziva svojstvom linearnosti; ,,lijepo ponašanje" s obzirom na zbrajanje zove se aditivnost, a s obzirom na množenje skalarom homogenost.

Definicija

Funkcija $F : V \to W$, gdje su V i W vektorski prostori zove se aditivna ako je $F(v + v') = F(v) + F(v')$ za sve $v, v' \in V$,

Definicija linearnog operatora

Ako u domeni i kodomeni neke funkcije F ima smisla zbrajati elemente i množiti ih skalarima, dakle ako su domena i kodomena od F vektorski prostori, onda se možemo pitati kako se F ,,ponaša" s obzirom na te dvije algebarske operacije. ,,Lijepo ponašanje" se onda naziva svojstvom linearnosti; ,,lijepo ponašanje" s obzirom na zbrajanje zove se aditivnost, a s obzirom na množenje skalarom homogenost.

Definicija

Funkcija $F : V \to W$, gdje su V i W vektorski prostori zove se aditivna ako je $F(v + v') = F(v) + F(v')$ za sve $v, v' \in V$, a homogena je ako je $F(\alpha\, v) = \alpha\, F(v)$ za sve $v \in V$ i sve skalare α.

Definicija linearnog operatora

Ako u domeni i kodomeni neke funkcije F ima smisla zbrajati elemente i množiti ih skalarima, dakle ako su domena i kodomena od F vektorski prostori, onda se možemo pitati kako se F ,,ponaša" s obzirom na te dvije algebarske operacije. ,,Lijepo ponašanje" se onda naziva svojstvom linearnosti; ,,lijepo ponašanje" s obzirom na zbrajanje zove se aditivnost, a s obzirom na množenje skalarom homogenost.

Definicija

Funkcija $F : V \to W$, gdje su V i W vektorski prostori zove se aditivna ako je $F(v + v') = F(v) + F(v')$ za sve $v, v' \in V$, a homogena je ako je $F(\alpha\, v) = \alpha\, F(v)$ za sve $v \in V$ i sve skalare α. Ako je F i aditivna i homogena, kažemo da je F linearni operator.

Definicija linearnog operatora

Ako u domeni i kodomeni neke funkcije F ima smisla zbrajati elemente i množiti ih skalarima, dakle ako su domena i kodomena od F vektorski prostori, onda se možemo pitati kako se F ,,ponaša" s obzirom na te dvije algebarske operacije. ,,Lijepo ponašanje" se onda naziva svojstvom linearnosti; ,,lijepo ponašanje" s obzirom na zbrajanje zove se aditivnost, a s obzirom na množenje skalarom homogenost.

Definicija

Funkcija $F : V \to W$, gdje su V i W vektorski prostori zove se aditivna ako je $F(v + v') = F(v) + F(v')$ za sve $v, v' \in V$, a homogena je ako je $F(\alpha\, v) = \alpha\, F(v)$ za sve $v \in V$ i sve skalare α. Ako je F i aditivna i homogena, kažemo da je F linearni operator.

- Mora li skup skalara biti isti za domenu i kodomenu linearnog operatora?

- Mora li skup skalara biti isti za domenu i kodomenu linearnog operatora?
- Ako je $W = \mathbb{R}$ (ili, ako je domena kompleksan prostor, ako je $W = \mathbb{C}$) govorimo o linearnom funkcionalu.

- Mora li skup skalara biti isti za domenu i kodomenu linearnog operatora?
- Ako je $W = \mathbb{R}$ (ili, ako je domena kompleksan prostor, ako je $W = \mathbb{C}$) govorimo o linearnom funkcionalu. Ako je $V = W$, govorimo o linearnom operatoru na V.
- Dokažite da su operatori skaliranja i linearne funkcije na unitarnim prostorima linearni operatori. Je li neki od njih linearan funkcional?

- Mora li skup skalara biti isti za domenu i kodomenu linearnog operatora?
- Ako je $W = \mathbb{R}$ (ili, ako je domena kompleksan prostor, ako je $W = \mathbb{C}$) govorimo o linearnom funkcionalu. Ako je $V = W$, govorimo o linearnom operatoru na V.
- Dokažite da su operatori skaliranja i linearne funkcije na unitarnim prostorima linearni operatori. Je li neki od njih linearan funkcional? $\hat{S}_1$ se naziva jedinični operator i označava s $\hat{I}_V$ ili $\hat{I}$.
- Navedite po jedan primjer funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koja jest i koja nije primjer linearnog operatora (funkcionala)!

- Mora li skup skalara biti isti za domenu i kodomenu linearnog operatora?
- Ako je $W = \mathbb{R}$ (ili, ako je domena kompleksan prostor, ako je $W = \mathbb{C}$) govorimo o linearnom funkcionalu. Ako je $V = W$, govorimo o linearnom operatoru na V.
- Dokažite da su operatori skaliranja i linearne funkcije na unitarnim prostorima linearni operatori. Je li neki od njih linearan funkcional? $\hat{S}_1$ se naziva jedinični operator i označava s $\hat{I}_V$ ili $\hat{I}$.
- Navedite po jedan primjer funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koja jest i koja nije primjer linearnog operatora (funkcionala)!
- Navedite po jedan primjer linearnog operatora s $C^1(I)$ u $C(I)$ i linearnog funkcionala s $C^1(I)$ u $\mathbb{R}$, gdje je $I = \langle 0, +\infty \rangle$.

- Mora li skup skalara biti isti za domenu i kodomenu linearnog operatora?
- Ako je $W = \mathbb{R}$ (ili, ako je domena kompleksan prostor, ako je $W = \mathbb{C}$) govorimo o linearnom funkcionalu. Ako je $V = W$, govorimo o linearnom operatoru na V.
- Dokažite da su operatori skaliranja i linearne funkcije na unitarnim prostorima linearni operatori. Je li neki od njih linearan funkcional? $\hat{S}_1$ se naziva jedinični operator i označava s $\hat{I}_V$ ili $\hat{I}$.
- Navedite po jedan primjer funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koja jest i koja nije primjer linearnog operatora (funkcionala)!
- Navedite po jedan primjer linearnog operatora s $C^1(I)$ u $C(I)$ i linearnog funkcionala s $C^1(I)$ u $\mathbb{R}$, gdje je $I = \langle 0, +\infty \rangle$.
- Dokažite da je zrcaljenje (osna simetrija) ravnine $V^2(O)$ linearan operator uz uvjet da os simetrije prolazi kroz O.

Osnovna svojstva linearnih operatora

Primjer

$\hat{0} : V \to W$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}_W$ *je linearan operator: nuloperator.*

Osnovna svojstva linearnih operatora

Primjer

$\hat{0} : V \to W$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}_W$ *je linearan operator: nuloperator.*

$\hat{S}_\alpha(\mathbf{0}_V) = ?,$

Osnovna svojstva linearnih operatora

Primjer

$\hat{0} : V \to W$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}_W$ *je linearan operator: nuloperator.*

$\hat{S}_\alpha(\mathbf{0}_V) = ?$, $\frac{d}{dx}$(nulfunkcija)=?

Osnovna svojstva linearnih operatora

Primjer

$\hat{0} : V \to W$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}_W$ *je linearan operator:* *nuloperator*.

$\hat{S}_\alpha(\mathbf{0}_V) =?$, $\frac{d}{dx}$(nulfunkcija)$=?$ $f_a(\mathbf{0}_U) =?$

Osnovna svojstva linearnih operatora

Primjer

$\hat{0} : V \to W$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}_W$ *je linearan operator: nuloperator.*

$\hat{S}_\alpha(\mathbf{0}_V) = ?$, $\frac{d}{dx}$(nulfunkcija)$=?$ $f_a(\mathbf{0}_U) = ?$

Teorem

Ako je $\hat{A} : V \to W$ *linearan operator, onda je* $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Dokaz. Za $a \neq \mathbf{0}_V$ imamo $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \hat{A}(0 \cdot a) = 0 \cdot \hat{A}(a) = \mathbf{0}_W$.

Osnovna svojstva linearnih operatora

Primjer

$\hat{0} : V \to W$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}_W$ *je linearan operator: nuloperator.*

$\hat{S}_\alpha(\mathbf{0}_V) = ?$, $\frac{d}{dx}$(nulfunkcija)=? $f_a(\mathbf{0}_U) = ?$

Teorem

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, onda je $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Dokaz. Za $a \neq \mathbf{0}_V$ imamo $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \hat{A}(0 \cdot a) = 0 \cdot \hat{A}(a) = \mathbf{0}_W$.

Zadatak

Jesu li $\sin, \cos \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *primjeri linearnih operatora?*

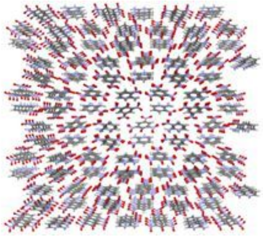
Uvod u simetrije

Zašto je kvadrat simetričniji od slova A, ali manje simetričan od kruga?

[1] Zapravo, izometrija: F mora čuvati udaljenosti i stoga veličine i oblike svih objekata u prostoru.

Uvod u simetrije

Zašto je kvadrat simetričniji od slova A, ali manje simetričan od kruga? Simetrija nekog objekta X u ravnini ili prostoru je preslikavanje[1] F ravnine odnosno prostora koje čuva izgled objekta ($F(X) = X$): Da niste bili prisutni dok se F provodio, ne biste znali da se išta dešavalo.



[1] Zapravo, izometrija: F mora čuvati udaljenosti i stoga veličine i oblike svih objekata u prostoru.

Operatori simetrije

Zadatak

Objasnite zašto translacije mogu biti simetrije i zašto one nisu linearni operatori na $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$.

Operatori simetrije

Zadatak

Objasnite zašto translacije mogu biti simetrije i zašto one nisu linearni operatori na $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$.

Teorem

Ako je $\hat{A} \neq \hat{0}$ linearan operator na $V^2(O)$ ili na $V^3(O)$, on svaki pravac kroz O preslikava u neki pravac kroz O.

Operatori simetrije

Zadatak

Objasnite zašto translacije mogu biti simetrije i zašto one nisu linearni operatori na $V^2(O)$ *odnosno* $V^3(O)$.

Teorem

Ako je $\hat{A} \neq \hat{0}$ *linearan operator na* $V^2(O)$ *ili na* $V^3(O)$, *on svaki pravac kroz* O *preslikava u neki pravac kroz* O. *Ako je* $\hat{A} \neq \hat{0}$ *linearan operator na na* $V^3(O)$, *on svaku ravninu kroz* O *preslikava u neku ravninu kroz* O *ili u neki pravac kroz* O.

Operatori simetrije

Zadatak

Objasnite zašto translacije mogu biti simetrije i zašto one nisu linearni operatori na $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$.

Teorem

Ako je $\hat{A} \neq \hat{0}$ linearan operator na $V^2(O)$ ili na $V^3(O)$, on svaki pravac kroz O preslikava u neki pravac kroz O. Ako je $\hat{A} \neq \hat{0}$ linearan operator na na $V^3(O)$, on svaku ravninu kroz O preslikava u neku ravninu kroz O ili u neki pravac kroz O.

Definicija

Ako je V unitaran prostor, linearni operator $\hat{A} : V \to V$ koji ima svojstvo $||\hat{A}(v)|| = ||v||$ za sve $v \in V$ naziva se ortogonalnim operatorom. Ako je V jedan od prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$, ortogonalne operatore nazivamo operatorima simetrije.

Dakle, operatori simetrije su linearni operatori na $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ koji čuvaju iznose svih vektora.

Dakle, operatori simetrije su linearni operatori na $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ koji čuvaju iznose svih vektora.
Osnovni tipovi operatora simetrije su:

- Jedinični operator $\mathbf{1}$.

Dakle, operatori simetrije su linearni operatori na $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ koji čuvaju iznose svih vektora.
Osnovni tipovi operatora simetrije su:

- Jedinični operator $\mathbf{1}$.
- Centralna simetrija (inverzija) s obzirom na centar O: $\overline{\mathbf{1}}(v) = -v$ (tj. $\overline{\mathbf{1}} = -\mathbf{1} = \hat{S}_{-1}$).

Dakle, operatori simetrije su linearni operatori na $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ koji čuvaju iznose svih vektora.
Osnovni tipovi operatora simetrije su:

- Jedinični operator $\mathbf{1}$.
- Centralna simetrija (inverzija) s obzirom na centar O: $\overline{\mathbf{1}}(v) = -v$ (tj. $\overline{\mathbf{1}} = -\mathbf{1} = \hat{S}_{-1}$).
- Zrcaljenje se različito definira u 2D i 3D slučaju:
  - Zrcaljenje ravnine je linearni operator $\hat{m} : V^2(O) \to V^2(O)$ za koji postoji pravac p (os simetrije) koji prolazi kroz O i koji ima svojstvo da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{m}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je polovište dužine $\overline{TT'}$ na pravcu p i $TT' \perp p$.

Dakle, operatori simetrije su linearni operatori na $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ koji čuvaju iznose svih vektora.
Osnovni tipovi operatora simetrije su:

- Jedinični operator $\mathbf{1}$.
- Centralna simetrija (inverzija) s obzirom na centar O: $\overline{\mathbf{1}}(v) = -v$ (tj. $\overline{\mathbf{1}} = -\mathbf{1} = \hat{S}_{-1}$).
- Zrcaljenje se različito definira u 2D i 3D slučaju:
  - Zrcaljenje ravnine je linearni operator $\hat{m} : V^2(O) \to V^2(O)$ za koji postoji pravac p (os simetrije) koji prolazi kroz O i koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{m}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je polovište dužine $\overline{TT'}$ na pravcu p i $TT' \perp p$.
  - Zrcaljenje prostora je linearan operator $\hat{m} : V^3(O) \to V^3(O)$, ali s ravninom Π na mjestu pravca p.

- Rotacija se također različito definira u ravnini i u prostoru:
  - Rotacija ravnine oko O je linearni operator $\hat{r} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\phi = \angle TOT'$ uvijek isti (nazivamo ga kutom rotacije).

- Rotacija se također različito definira u ravnini i u prostoru:
  - Rotacija ravnine oko O je linearni operator $\hat{r} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\phi = \angle TOT'$ uvijek isti (nazivamo ga kutom rotacije).
  - Rotacija prostora je linearan operator $\hat{r} : V^3(O) \to V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle T\overline{O}T'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T.

- Rotacija se također različito definira u ravnini i u prostoru:
  - Rotacija ravnine oko O je linearni operator $\hat{r} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\phi = \angle TOT'$ uvijek isti (nazivamo ga kutom rotacije).
  - Rotacija prostora je linearan operator $\hat{r} : V^3(O) \to V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle T\overline{O}T'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T.

Ako je kut rotacije $360^\circ/n$ gdje je n prirodan broj, govorimo o rotaciji reda n. Rotacije reda n označavamo s $\mathbf{n}$. Uočite da je jedinični operator rotacija reda 1.

- Rotacija se također različito definira u ravnini i u prostoru:
  - Rotacija ravnine oko O je linearni operator $\hat{r} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\phi = \angle TOT'$ uvijek isti (nazivamo ga kutom rotacije).
  - Rotacija prostora je linearan operator $\hat{r} : V^3(O) \to V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle T\overline{O}T'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T.

  Ako je kut rotacije $360°/n$ gdje je n prirodan broj, govorimo o rotaciji reda n. Rotacije reda n označavamo s $\mathbf{n}$. Uočite da je jedinični operator rotacija reda 1.

Zadatak

Koji je maksimalni red rotacijske simetrije pravilnog mnogokuta?

- Rotacija se također različito definira u ravnini i u prostoru:
  - Rotacija ravnine oko O je linearni operator $\hat{r}: V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\phi = \angle TOT'$ uvijek isti (nazivamo ga kutom rotacije).
  - Rotacija prostora je linearan operator $\hat{r}: V^3(O) \to V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle T\overline{O}T'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T.

  Ako je kut rotacije $360^\circ/n$ gdje je n prirodan broj, govorimo o rotaciji reda n. Rotacije reda n označavamo s $\mathbf{n}$. Uočite da je jedinični operator rotacija reda 1.

Zadatak

Koji je maksimalni red rotacijske simetrije pravilnog mnogokuta?

Zadatak

Dokažite da je na $V^2(O)$ $\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{2}$.

Kompozicija linearnih operatora

Teorem

Ako je kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ definirana, ona je također linearan operator. Ako su $\hat{A}$ i $\hat{B}$ oba ortogonalni, takva je i njihova kompozicija.

Kompozicija linearnih operatora

Teorem

Ako je kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ definirana, ona je također linearan operator. Ako su $\hat{A}$ i $\hat{B}$ oba ortogonalni, takva je i njihova kompozicija.

Rotoinverzije su operatori simetrije na $V^3(O)$ koji su kompozicije $\mathbf{1}$ s rotacijama.

Kompozicija linearnih operatora

Teorem

Ako je kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ definirana, ona je također linearan operator. Ako su $\hat{A}$ i $\hat{B}$ oba ortogonalni, takva je i njihova kompozicija.

Rotoinverzije su operatori simetrije na $V^3(O)$ koji su kompozicije $\mathbf{1}$ s rotacijama. Rotorefleksije su operatori simetrije na $V^3(O)$ koji su kompozicije zrcaljenja s rotacijama, uz uvjet da je ravnina simetrije okomita na os rotacije.

Kompozicija linearnih operatora

Teorem

Ako je kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ definirana, ona je također linearan operator. Ako su $\hat{A}$ i $\hat{B}$ oba ortogonalni, takva je i njihova kompozicija.

Rotoinverzije su operatori simetrije na $V^3(O)$ koji su kompozicije $\mathbf{1}$ s rotacijama. Rotorefleksije su operatori simetrije na $V^3(O)$ koji su kompozicije zrcaljenja s rotacijama, uz uvjet da je ravnina simetrije okomita na os rotacije. Može se dokazati da se svi operatori simetrije ili jedne od tri osnovne vrste (zrcaljenje, rotacija, centralna simetrija) ili su kompozicije dvaju takvih.