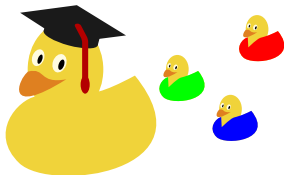


# 5. tema: Matrica linearnog operatora i osnovne operacije s matricama

*Franka Miriam Brückler*

---



## Primjer

*Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?*

## Primjer

Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?

$$\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}, \quad \hat{A}(\vec{b}) = \vec{c}, \quad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}([-1, 2, 0]) &= \hat{A}(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -\hat{A}(\vec{a}) + 2\hat{A}(\vec{b}) = \\ &= -\vec{b} + 2\vec{c} = [0, -1, 2].\end{aligned}$$

## Primjer

Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?

$$\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}, \quad \hat{A}(\vec{b}) = \vec{c}, \quad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}([-1, 2, 0]) &= \hat{A}(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -\hat{A}(\vec{a}) + 2\hat{A}(\vec{b}) = \\ &= -\vec{b} + 2\vec{c} = [0, -1, 2].\end{aligned}$$

## Primjer

$\hat{A} : V \rightarrow W, \dim V = 3, \dim W = 2,$

## Primjer

Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?

$$\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}, \quad \hat{A}(\vec{b}) = \vec{c}, \quad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}([-1, 2, 0]) &= \hat{A}(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -\hat{A}(\vec{a}) + 2\hat{A}(\vec{b}) = \\ &= -\vec{b} + 2\vec{c} = [0, -1, 2].\end{aligned}$$

## Primjer

$\hat{A}: V \rightarrow W$ ,  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$ ,  $\mathcal{B}_V = (a, b, c)$ ,  $\mathcal{B}_W = (e, f)$

## Primjer

Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?

$$\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}, \quad \hat{A}(\vec{b}) = \vec{c}, \quad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}([-1, 2, 0]) &= \hat{A}(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -\hat{A}(\vec{a}) + 2\hat{A}(\vec{b}) = \\ &= -\vec{b} + 2\vec{c} = [0, -1, 2].\end{aligned}$$

## Primjer

$\hat{A}: V \rightarrow W$ ,  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$ ,  $\mathcal{B}_V = (a, b, c)$ ,  $\mathcal{B}_W = (e, f)$   
 $v \mapsto \hat{A}(v)$ ,

## Primjer

Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?

$$\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}, \quad \hat{A}(\vec{b}) = \vec{c}, \quad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}([-1, 2, 0]) &= \hat{A}(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -\hat{A}(\vec{a}) + 2\hat{A}(\vec{b}) = \\ &= -\vec{b} + 2\vec{c} = [0, -1, 2].\end{aligned}$$

## Primjer

$\hat{A}: V \rightarrow W$ ,  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$ ,  $\mathcal{B}_V = (a, b, c)$ ,  $\mathcal{B}_W = (e, f)$   
 $v \mapsto \hat{A}(v)$ ,  $v = [x, y, z]_{\mathcal{B}} = x a + y b + z c$

## Primjer

Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?

$$\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}, \quad \hat{A}(\vec{b}) = \vec{c}, \quad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}([-1, 2, 0]) &= \hat{A}(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -\hat{A}(\vec{a}) + 2\hat{A}(\vec{b}) = \\ &= -\vec{b} + 2\vec{c} = [0, -1, 2].\end{aligned}$$

## Primjer

$\hat{A}: V \rightarrow W$ ,  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$ ,  $\mathcal{B}_V = (a, b, c)$ ,  $\mathcal{B}_W = (e, f)$   
 $v \mapsto \hat{A}(v)$ ,  $v = [x, y, z]_{\mathcal{B}} = x a + y b + z c \Rightarrow$   
 $\hat{A}(v) = \hat{A}(x a + y b + z c) = x \hat{A}(a) + y \hat{A}(b) + z \hat{A}(c)$

## Primjer

Neka je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  neka baza za  $V^3(O)$  i neka je za linearan operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, drugi u treći, a treći u prvi. U koji vektor se preslika vektor  $[-1, 2, 0]$ ?

$$\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}, \quad \hat{A}(\vec{b}) = \vec{c}, \quad \hat{A}(\vec{c}) = \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}([-1, 2, 0]) &= \hat{A}(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -\hat{A}(\vec{a}) + 2\hat{A}(\vec{b}) = \\ &= -\vec{b} + 2\vec{c} = [0, -1, 2].\end{aligned}$$

## Primjer

$\hat{A}: V \rightarrow W$ ,  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$ ,  $\mathcal{B}_V = (a, b, c)$ ,  $\mathcal{B}_W = (e, f)$   
 $v \mapsto \hat{A}(v)$ ,  $v = [x, y, z]_{\mathcal{B}} = xa + yb + zc \Rightarrow$   
 $\hat{A}(v) = \hat{A}(xa + yb + zc) = x\hat{A}(a) + y\hat{A}(b) + z\hat{A}(c) =$   
 $= x(\alpha e + \beta f) + y(\gamma e + \delta f) + z(\varepsilon e + \zeta f) =$   
 $[x\alpha + y\gamma + z\varepsilon, x\beta + y\delta + z\zeta]$

## Teorem

Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na *jednoj* bazi domene, tj. potpuno je zadan koordinatama slika svih vektora odabrane baze domene s obzirom na odabranu bazu kodomene.

## Teorem

Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na *jednoj* bazi domene, tj. potpuno je zadan koordinatama slika svih vektora odabrane baze domene s obzirom na odabranu bazu kodomene.

Ako je domena linearnog operatora jednaka kodomeni, ukoliko nije drugačije rečeno, podrazumijeva se da u domeni i kodomeni uzimamo istu bazu.

## Teorem

Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na *jednoj* bazi domene, tj. potpuno je zadan koordinatama slika svih vektora odabrane baze domene s obzirom na odabranu bazu kodomene.

Ako je domena linearnog operatora jednaka kodomeni, ukoliko nije drugačije rečeno, podrazumijeva se da u domeni i kodomeni uzimamo istu bazu.

$\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ ,  $\hat{A} : V \rightarrow W$  linearan operator, & baze domene i kodomene  $\mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{B}_W = (f_1, \dots, f_m)$

Teorem  $\Rightarrow \hat{A}$  je potpuno zadan s  $n$  uređenih  $m$ -torki (koordinata od  $\hat{A}(e_i)$ ) — njih možemo zapisati kao stupce jedne pravokutne tablice

## Zadatak

*Ispišite takvu tablicu za slučaj iz prvog primjera.*

# Matrice

## Definicija

**Matrica** je pravokutna tablica koja sadrži brojeve. Brojevi unutar matrice zovu se njenim elementima. Matrice čiji elementi su realni brojevi zovemo realnim matricama (a one s kompleksnim elementima kompleksnim matricama). Matrica je reda (tipa, dimenzije)  $m \times n$  ako ima  $m$  redaka i  $n$  stupaca; ako je  $m = n$  govorimo o **kvadratnoj matrici** reda  $n$ .

$$A = (a_{ij})$$

# Matrice

## Definicija

**Matrica** je pravokutna tablica koja sadrži brojeve. Brojevi unutar matrice zovu se njenim elementima. Matrice čiji elementi su realni brojevi zovemo realnim matricama (a one s kompleksnim elementima kompleksnim matricama). Matrica je reda (tipa, dimenzije)  $m \times n$  ako ima  $m$  redaka i  $n$  stupaca; ako je  $m = n$  govorimo o **kvadratnoj matrici** reda  $n$ .

$$A = (a_{ij})$$

## Primjer

Matrica  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  je tipa  $2 \times 3$ . Za tu je matricu  $a_{12} = 1$ ,  $a_{23} = 2$ , a  $a_{32}$  ne postoji jer matrica nema trećeg retka.

# Matrica linearnog operatora

## Definicija

**Matrica linearnog operatora**  $\hat{A} : V \rightarrow W$  s obzirom na odabrane baze  $\mathcal{B}_V$  i  $\mathcal{B}_W$  (konačnodimenzionalne) domene i kodomene je matrica  $A$  u kojoj se redom u stupcima nalaze koordinate slika vektora baze  $\mathcal{B}_V$  u bazi  $\mathcal{B}_W$ . Ako je  $V = W$  i  $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W = \mathcal{B}$ , govorimo o matrici linearnog operatora s obzirom na bazu  $\mathcal{B}$ .

## Zadatak

*Zapišite matricu linearnog operatora za situaciju iz prvog primjera.*

# Matrica linearnog operatora

## Definicija

**Matrica linearnog operatora**  $\hat{A} : V \rightarrow W$  s obzirom na odabrane baze  $\mathcal{B}_V$  i  $\mathcal{B}_W$  (konačnodimenzionalne) domene i kodomene je matrica  $A$  u kojoj se redom u stupcima nalaze koordinate slika vektora baze  $\mathcal{B}_V$  u bazi  $\mathcal{B}_W$ . Ako je  $V = W$  i  $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W = \mathcal{B}$ , govorimo o matrici linearnog operatora s obzirom na bazu  $\mathcal{B}$ .

## Zadatak

*Zapišite matricu linearnog operatora za situaciju iz prvog primjera.*

## Zadatak

*Koliko redova i stupaca će imati matrica linearnog funkcionala kojemu je domena dimenzije 4?*

## Teorem

Ako je  $\hat{A} : V \rightarrow W$  linearan operator, onda s obzirom na bilo koje baze domene i kodomene matrica od  $\hat{A}$  ima redaka kolika je dimenzija kodomene, a stupaca kolika je dimenzija domene. Posebno, matrice linearnih operatora na  $V$  su kvadratne.

## Teorem

Ako je  $\hat{A} : V \rightarrow W$  linearan operator, onda s obzirom na bilo koje baze domene i kodomene matrica od  $\hat{A}$  ima redaka kolika je dimenzija kodomene, a stupaca kolika je dimenzija domene. Posebno, matrice linearnih operatora na  $V$  su kvadratne.

## Zadatak

*Ima li operator deriviranja  $\frac{d}{dx} : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  matricu/e?*

## Teorem

Ako je  $\hat{A} : V \rightarrow W$  linearan operator, onda s obzirom na bilo koje baze domene i kodomene matrica od  $\hat{A}$  ima redaka kolika je dimenzija kodomene, a stupaca kolika je dimenzija domene. Posebno, matrice linearnih operatora na  $V$  su kvadratne.

## Zadatak

*Ima li operator deriviranja  $\frac{d}{dx} : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  matricu/e? A ako ga gledamo kao operator s  $\mathcal{P}_3$  u  $\mathcal{P}_2$ ? Ako ima, zapišite jednu odgovarajuću matricu tog linearnog operatora s obzirom na neku bazu.*

- $\hat{O} : V \rightarrow W$  s obzirom na svaki par baza domene i kodomene ima istu  $m \times n$ -matricu — u njoj su svi elementi nule. Takve matrice nazivamo **nulmatricama** (tipa  $m \times n$ , oznaka  $0_{m,n}$ ).

- $\hat{O} : V \rightarrow W$  s obzirom na svaki par baza domene i kodomene ima istu  $m \times n$ -matricu — u njoj su svi elementi nule. Takve matrice nazivamo **nulmatricama** (tipa  $m \times n$ , oznaka  $0_{m,n}$ ).
- $\hat{I} : V \rightarrow V$  s obzirom na svaku bazu ima matricu oblika

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Takve matrice zovemo **jedinične matrice**. Pozicije na kojima se nalaze brojevi 1 u jediničnoj matrici, dakle pozicije kojima je indeks retka jednak indeksu stupca, zovu se **dijagonalom matrice**.

- $\hat{O} : V \rightarrow W$  s obzirom na svaki par baza domene i kodomene ima istu  $m \times n$ -matricu — u njoj su svi elementi nule. Takve matrice nazivamo **nulmatricama** (tipa  $m \times n$ , oznaka  $0_{m,n}$ ).
- $\hat{I} : V \rightarrow V$  s obzirom na svaku bazu ima matricu oblika

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Takve matrice zovemo **jedinične matrice**. Pozicije na kojima se nalaze brojevi 1 u jediničnoj matrici, dakle pozicije kojima je indeks retka jednak indeksu stupca, zovu se **dijagonalom matrice**.

- Odredite matricu operatora skaliranja s  $\pi$  kao operatora na prostoru dimenzije 5!

# Množenje matrice skalarom

Matrica operatora skaliranja s  $\alpha$  je  $\alpha I_n$ , gdje je  $n$  dimenzija domene (i kodomene). Općenito, **množenje matrice skalarom** je definirano kao  $A = [\alpha a_{ij}]$ .

# Množenje matrice skalarom

Matrica operatora skaliranja s  $\alpha$  je  $\alpha I_n$ , gdje je  $n$  dimenzija domene (i kodomene). Općenito, **množenje matrice skalarom** je definirano kao  $A = [\alpha a_{ij}]$ .

## Primjer

*Budući da je centralna simetrija zapravo operator skaliranja s  $-1$  na  $V^3(O)$ , s obzirom na bilo koju bazu od  $V^3(O)$  matrica centralne simetrije je matrica*

$$-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3.$$

## Množenje matrice skalarom

Matrica operatora skaliranja s  $\alpha$  je  $\alpha I_n$ , gdje je  $n$  dimenzija domene (i kodomene). Općenito, **množenje matrice skalarom** je definirano kao  $A = [\alpha a_{ij}]$ .

### Primjer

*Budući da je centralna simetrija zapravo operator skaliranja s  $-1$  na  $V^3(O)$ , s obzirom na bilo koju bazu od  $V^3(O)$  matrica centralne simetrije je matrica*

$$-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3.$$

**Suprotna matrica** matrice  $A$  je matrica  $-A$  u kojoj su promijenjeni predznaci svih elemenata od  $A$ , tj. matrica  $-A = -1 \cdot A = [-a_{ij}]$ .

# Ovisnost matrice linearnog operatora o odabiru baza

## Zadatak

Linearan operator  $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadan je kao  $\hat{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ . Odredite njegove matrice obzirom na kanonsku bazu od  $\mathbb{R}^2$  i obzirom na bazu  $\mathcal{B} = (a, b)$  gdje su  $a = (4, 3)$ ,  $b = (-2, 1)$ .

## Ovisnost matrice linearnog operatora o odabiru baza

### Zadatak

Linearan operator  $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadan je kao  $\hat{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ . Odredite njegove matrice obzirom na kanonsku bazu od  $\mathbb{R}^w$  i obzirom na bazu  $\mathcal{B} = (a, b)$  gdje su  $a = (4, 3)$ ,  $b = (-2, 1)$ .

Dakle, općenito matrica linearnog operatora ovisi ne samo o samom operatoru i dimenzijama domene i kodomene, nego i o odabiru baze u domeni i u kodomeni!

# Ovisnost matrice linearnog operatora o odabiru baza

## Zadatak

Linearan operator  $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadan je kao  $\hat{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ . Odredite njegove matrice obzirom na kanonsku bazu od  $\mathbb{R}^w$  i obzirom na bazu  $\mathcal{B} = (a, b)$  gdje su  $a = (4, 3)$ ,  $b = (-2, 1)$ .

Dakle, općenito matrica linearnog operatora ovisi ne samo o samom operatoru i dimenzijama domene i kodomene, nego i o odabiru baze u domeni i u kodomeni!

## Zadatak

Neka je  $\hat{m}$  zrcaljenje prostora  $V^2(O)$  s obzirom na neki pravac koja prolazi kroz  $O$ . Uzmimo ortogonalnu bazu  $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$  prostora  $V^2(O)$  tako da se os simetrije podudara s  $y$ -osi. Koja je onda matrica operatora  $\hat{m}$ ?

# Matrice osnovnih linearnih operatora simetrije u nekim specijalnim bazama

## Osnovni linearni operatori simetrije na $V^2(O)$

- $\hat{I} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ , bilo koja baza
- $\hat{m} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ , ortogonalna baza takva da jedan vektor baze leži na osi simetrije
- $\hat{r}_\alpha : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ , ortonormirana baza

# Matrice osnovnih linearnih operatora simetrije u nekim specijalnim bazama

## Osnovni linearni operatori simetrije na $V^2(O)$

- $\hat{I} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ , bilo koja baza
- $\hat{m} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ , ortogonalna baza takva da jedan vektor baze leži na osi simetrije
- $\hat{r}_\alpha : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ , ortonormirana baza

## Osnovni linearni operatori simetrije na $V^3(O)$

- $\hat{I} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ , bilo koja baza
- $-\hat{I} = \hat{i} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ , bilo koja baza
- $\hat{m} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ , ortogonalna baza takva da dva vektora baze leže u ravnini simetrije
- $\hat{r}_\alpha : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ , ortonormirana baza takva da jedan vektor baze leži na osi rotacije

# Ortogonalne matrice

Kvadratna matrica reda  $n$  je **ortogonalna matrica** ako:

- Svaka dva retka (odnosno svaka dva stupca) su ortogonalni kao elementi od  $\mathbb{R}^n$ .
- Ako bilo koji redak ili stupac skalarno pomnožimo skalarno sam sa sobom u  $\mathbb{R}^n$ , dobit ćemo 1: retci i stupci su normirani (norme 1).

# Ortogonalne matrice

Kvadratna matrica reda  $n$  je **ortogonalna matrica** ako:

- Svaka dva retka (odnosno svaka dva stupca) su ortogonalni kao elementi od  $\mathbb{R}^n$ .
- Ako bilo koji redak ili stupac skalarno pomnožimo skalarno sam sa sobom u  $\mathbb{R}^n$ , dobit ćemo 1: retci i stupci su normirani (norme 1).

## Teorem

Za svaki ortogonalan operator je svaka njegova matrica s obzirom na bilo koju *ortonormiranu* bazu ortogonalna matrica.

## Zadatak

Može li  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  biti matrica ikojeg operatora simetrije na  $V^2(O)$  u ikojoj bazi?

## Primjer

*U koju poziciju se točka  $(-1, 2, 1)$  zarotira rotacijom  $\mathbf{3}_x$  za  $120^\circ$  oko  $x$ -osi Kartezijevog koordinatnog sustava?*

## Primjer

U koju poziciju se točka  $(-1, 2, 1)$  zarotira rotacijom  $\mathbf{3}_x$  za  $120^\circ$  oko  $x$ -osi Kartezijevog koordinatnog sustava?

Ako koristimo matrice za izračunavanje kako linearni operator  $\hat{A}: V \rightarrow W$  preslikava neki vektor  $v \in V$ , podrazumijevamo:

- koordinate od  $v = (x_1, \dots, x_n)$  su dane s obzirom na bazu  $\mathcal{B}_V$  domene putem koje je definirana matrica  $A$  linearnog operatora  $\hat{A}$  i zapisane kao **matrica-stupac**, tj. kao matrica tipa  $n \times 1$ ,
- koordinate od  $\hat{A}(v)$  su izražene na bazu  $\mathcal{B}_W$  kodomene putem koje je definirana matrica  $A$  i zapisane kao matrica-stupac tipa  $m \times 1$ .

## Primjer

U koju poziciju se točka  $(-1, 2, 1)$  zarotira rotacijom  $\mathbf{3}_x$  za  $120^\circ$  oko  $x$ -osi Kartezijevog koordinatnog sustava?

Ako koristimo matrice za izračunavanje kako linearni operator  $\hat{A}: V \rightarrow W$  preslikava neki vektor  $v \in V$ , podrazumijevamo:

- koordinate od  $v = (x_1, \dots, x_n)$  su dane s obzirom na bazu  $\mathcal{B}_V$  domene putem koje je definirana matrica  $A$  linearnog operatora  $\hat{A}$  i zapisane kao **matrica-stupac**, tj. kao matrica tipa  $n \times 1$ ,
- koordinate od  $\hat{A}(v)$  su izražene na bazu  $\mathcal{B}_W$  kodomene putem koje je definirana matrica  $A$  i zapisane kao matrica-stupac tipa  $m \times 1$ .

Vrijedi: Koordinate  $(y_1, \dots, y_m)$  od  $\hat{A}(v)$  su redom skalarni produkti redaka matrice  $A$  s  $(x_1, \dots, x_n)$ , gledani kao standardni skalarni produkti u  $\mathbb{R}^n$ . Pišemo:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

U nastavku umjesto  $\hat{A}(v)$  pišemo  $\hat{A}v$ .

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

U nastavku umjesto  $\hat{A}(v)$  pišemo  $\hat{A}v$ .

### Zadatak

*Zapišite standardni skalarni produkt u  $\mathbb{R}^n$  kao množenje matrica. Može li se to interpretirati kao djelovanje nekog linearnog operatora?*

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

U nastavku umjesto  $\hat{A}(v)$  pišemo  $\hat{A}v$ .

### Zadatak

*Zapišite standardni skalarni produkt u  $\mathbb{R}^n$  kao množenje matrica. Može li se to interpretirati kao djelovanje nekog linearnog operatora?*

### Zadatak

*Izračunajte poziciju točke  $(2, -5)$  Kartezijevog koordinatnog sustava u ravnini nakon rotacije  $\mathbf{8}^3$  za  $135^\circ$  oko ishodišta.*

## Zadatak

*Tzv. opće pozicije u prostornoj grupi  $Pbcn$  su točke  $T + (0, 0, 0)$ ,  $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $T + (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $T + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ,  $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $T + (\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $T + (0, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $T + (0, 0, \frac{1}{2})$ , gdje je  $T$  proizvoljna točka rešetke, ako je (kristalografska) baza prostora opća ortogonalna baza ( $a \neq b \neq c \neq a$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ). Zapišite sve matrice (s obzirom na navedenu bazu) svih osnovnih operatora simetrije koji su simetrije ove rešetke za ovu kristalnu rešetku, tj. takav da se sve opće pozicije preslikavaju u sve opće pozicije.*

## Zadatak

*Tzv. opće pozicije u prostornoj grupi Pbcn su točke  $T + (0, 0, 0)$ ,  $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $T + (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $T + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ,  $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $T + (\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $T + (0, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $T + (0, 0, \frac{1}{2})$ , gdje je  $T$  proizvoljna točka rešetke, ako je (kristalografska) baza prostora opća ortogonalna baza ( $a \neq b \neq c \neq a$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ). Zapišite sve matrice (s obzirom na navedenu bazu) svih osnovnih operatora simetrije koji su simetrije ove rešetke za ovu kristalnu rešetku, tj. takav da se sve opće pozicije preslikavaju u sve opće pozicije.*

## Svaka matrica predstavlja neki linearan operator

Ako je  $A$  proizvoljna matrica tipa  $m \times n$ , onda je s  $\hat{A}(X) = A \cdot X$  zadan linearan operator koji preslikava matrice-stupce tipa  $n \times 1$  u matrice-stupce  $m \times 1$  i za njega je  $A$  matrica s obzirom na kanonske baze domene i kodomene.

## Primjer

Za koje domene i kodomene se preslikavanje  $X \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$  može shvatiti kao linearan operator s matricom  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ?

## Zadatak

Kvadrat ima vrhove u točkama koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu imaju koordinate  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$ . Neka je  $M$  proizvoljna  $2 \times 2$ -matrica i  $\hat{M}$  linearni operator na  $V^2(O)$  definiran s

$$\hat{M}\vec{v} = \hat{M}(x\vec{i} + y\vec{j}) := M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

U kakve četverokute  $\hat{M}$  može preslikati zadani kvadrat? U kakve ne? Ako je neki drugi kvadrat određen vrhovima  $(4,4)$ ,  $(6,2)$ ,  $(8,4)$ ,  $(6,6)$ , uz koje uvjete na  $M$  će se oba kvadrata preslikati u istu vrstu četverokuta?

## Zbrajanje i oduzimanje matrica

$$\hat{A}, \hat{B} : V \rightarrow W,$$

$$(\hat{A} + \hat{B})v := \hat{A}v + \hat{B}v$$

## Zbrajanje i oduzimanje matrica

$$\hat{A}, \hat{B} : V \rightarrow W,$$

$$(\hat{A} + \hat{B})v := \hat{A}v + \hat{B}v$$

### Zadatak

*Je li zbroj centralne simetrije s obzirom na  $O$  i zrcaljenja s obzirom na  $(x, y)$ -ravninu operator simetrije?*

## Zbrajanje i oduzimanje matrica

$$\hat{A}, \hat{B} : V \rightarrow W,$$

$$(\hat{A} + \hat{B})v := \hat{A}v + \hat{B}v$$

### Zadatak

*Je li zbroj centralne simetrije s obzirom na  $O$  i zrcaljenja s obzirom na  $(x, y)$ -ravninu operator simetrije?*

Ako smo fiksirali matrice domene i kodomene, zbroju linearnih operatora odgovara matrica koja je zbroj njihovih matrica:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja matrica tipa  $m \times n$  je matrica tipa  $m \times n$ .  
Oduzimanje matrica definiramo kao pribrajanje suprotne matrice:  
 $A - B = A + (-B)$ .

## Zadatak

Odaberite po volji dvije matrice  $A, B \in M_{2,3}$  i neki skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Zatim riješite matričnu jednadžbu

$$A + \alpha X = B.$$

## Zadatak

Odaberite po volji dvije matrice  $A, B \in M_{2,3}$  i neki skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Zatim riješite matričnu jednadžbu

$$A + \alpha X = B.$$

Je li skup svih matrica vektorski prostor?

## Zadatak

Odaberite po volji dvije matrice  $A, B \in M_{2,3}$  i neki skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Zatim riješite matričnu jednadžbu

$$A + \alpha X = B.$$

Je li skup svih matrica vektorski prostor?

## Vektorski prostori matrica

Skup svih realni matrica tipa  $m \times n$ , u oznaci  $M_{m,n}$ , je realni vektorski prostor dimenzije  $m \cdot n$ .

U slučaju  $n \times n$ -matrica pišemo  $M_n$  za  $M_{n,n}$ . Uočimo i da se opisanom vezom među vektorskim prostorom  $M_{m,n}$  i  $\mathbb{R}^{m \cdot n}$  pojam kanonske baze prirodno prenosi i u  $M_{m,n}$  pri čemu će matrice kanonske baze od  $M_{m,n}$  imati po jednu jedinicu (svaka na različitim pozicijama  $(i, j)$ ), a sve ostalo nule, pa takve matrice označavamo s  $E_{ij}$  (matrica tipa  $m \times n$  koja ima sve nule, osim na poziciji  $(i, j)$  gdje je joj je element 1).

## Zadatak

*Nadite jedan netrivialni potprostor realnog vektorskog prostora  $M_2$ . Koja je dimenzija tog vektorskog prostora?*

## Zadatak

*Nadite jedan netrivialni potprostor realnog vektorskog prostora  $M_2$ . Koja je dimenzija tog vektorskog prostora?*

## Primjer

*Bilo kojih pet realnih 2-matrica su linearno zavisne jer se radi o pet matrica iz  $M_2$  koji ima dimenziju  $2 \cdot 2 = 4$ .*

Na vektorskim prostorima (kvadratnih) matrica se često koristi linearan funkcional koji nosi ime **trag**. **Trag** je linearan funkcional na odabranom  $M_n$  koji svakoj matrici  $A$  tog prostora pridružuje zbroj  $\text{tr}(A)$  njenih dijagonalnih elemenata. Primjerice, trag jedinične matrice reda  $n$  iznosi  $n$ , a trag matrice rotacije za kut  $\phi$  oko  $z$ -osi (u Kartezijevom koordinatnom sustavu) iznosi  $1 + 2 \cos \phi$ .