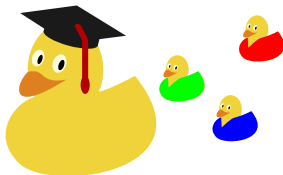


6. tema: Množenje i invertiranje matrica

Franka Miriam Brückler



Množenje matrica

Množenje matrica je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora.

Zadatak

Ako $A \cdot B$ ima smisla, znači li to da i $B \cdot A$ ima smisla? Ako ima, vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

Množenje matrica

Množenje matrica je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora.

Zadatak

Ako $A \cdot B$ ima smisla, znači li to da i $B \cdot A$ ima smisla? Ako ima, vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

- $\hat{A} : V \rightarrow W, \hat{B} : U \rightarrow V,$

Množenje matrica

Množenje matrica je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora.

Zadatak

Ako $A \cdot B$ ima smisla, znači li to da i $B \cdot A$ ima smisla? Ako ima, vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

- $\hat{A} : V \rightarrow W, \hat{B} : U \rightarrow V, \hat{A} \circ \hat{B} : U \rightarrow W$

Množenje matrica

Množenje matrica je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora.

Zadatak

Ako $A \cdot B$ ima smisla, znači li to da i $B \cdot A$ ima smisla? Ako ima, vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

- $\hat{A} : V \rightarrow W$, $\hat{B} : U \rightarrow V$, $\hat{A} \circ \hat{B} : U \rightarrow W$
- A matrica od \hat{A} i B matrica od \hat{B} s obzirom na neke baze od V i W odnosno od V i U , pri čemu za V podrazumijevamo da smo uzeli istu bazu i za A i za B ;

Množenje matrica

Množenje matrica je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora.

Zadatak

Ako $A \cdot B$ ima smisla, znači li to da i $B \cdot A$ ima smisla? Ako ima, vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

- $\hat{A} : V \rightarrow W$, $\hat{B} : U \rightarrow V$, $\hat{A} \circ \hat{B} : U \rightarrow W$
- A matrica od \hat{A} i B matrica od \hat{B} s obzirom na neke baze od V i W odnosno od V i U , pri čemu za V podrazumijevamo da smo uzeli istu bazu i za A i za B ; $A \cdot B$ treba biti matrica od $\hat{A} \circ \hat{B}$
- $\dim V = \text{broj stupaca od } A = \text{broj redaka od } B$
- A i B su **ulančane matrice**, tj. mogu se množiti u redosljedu $A \cdot B$, ako je broj stupaca od A jednak broju redaka od B ;

Množenje matrica

Množenje matrica je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora.

Zadatak

Ako $A \cdot B$ ima smisla, znači li to da i $B \cdot A$ ima smisla? Ako ima, vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

- $\hat{A} : V \rightarrow W$, $\hat{B} : U \rightarrow V$, $\hat{A} \circ \hat{B} : U \rightarrow W$
- A matrica od \hat{A} i B matrica od \hat{B} s obzirom na neke baze od V i W odnosno od V i U , pri čemu za V podrazumijevamo da smo uzeli istu bazu i za A i za B ; $A \cdot B$ treba biti matrica od $\hat{A} \circ \hat{B}$
- $\dim V = \text{broj stupaca od } A = \text{broj redaka od } B$
- A i B su **ulančane matrice**, tj. mogu se množiti u redosljedju $A \cdot B$, ako je broj stupaca od A jednak broju redaka od B ; rezultat tada ima

Množenje matrica

Množenje matrica je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora.

Zadatak

Ako $A \cdot B$ ima smisla, znači li to da i $B \cdot A$ ima smisla? Ako ima, vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

- $\hat{A} : V \rightarrow W$, $\hat{B} : U \rightarrow V$, $\hat{A} \circ \hat{B} : U \rightarrow W$
- A matrica od \hat{A} i B matrica od \hat{B} s obzirom na neke baze od V i W odnosno od V i U , pri čemu za V podrazumijevamo da smo uzeli istu bazu i za A i za B ; $A \cdot B$ treba biti matrica od $\hat{A} \circ \hat{B}$
- $\dim V = \text{broj stupaca od } A = \text{broj redaka od } B$
- A i B su **ulančane matrice**, tj. mogu se množiti u redosljedu $A \cdot B$, ako je broj stupaca od A jednak broju redaka od B ; rezultat tada ima $\dim U$ stupaca i $\dim W$ redaka

matrica tipa $m \times p$ se može množiti s $p \times n$ -matricom i rezultat je $m \times n$ -matrica Element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt (u \mathbb{R}^p) i -tog retka od A i j -tog stupca od B

Zadatak

Odredite matricu rotoinverzije $\bar{\mathbf{8}} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ ako je odabrana ortonormirana baza takva da je os rotacijske komponente smjera prvog vektora baze. Kamo $\bar{\mathbf{8}}$ preslika vektor koji u toj bazi ima koordinate $[1, 1, 1]$?

matrica tipa $m \times p$ se može množiti s $p \times n$ -matricom i rezultat je $m \times n$ -matrica Element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt (u \mathbb{R}^p) i -tog retka od A i j -tog stupca od B

Zadatak

Odredite matricu rotoinverzije $\bar{\mathbf{8}} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ ako je odabrana ortonormirana baza takva da je os rotacijske komponente smjera prvog vektora baze. Kamo $\bar{\mathbf{8}}$ preslika vektor koji u toj bazi ima koordinate $[1, 1, 1]$?

Komutator dviju kvadratnih matrica A i B istog reda je

$$[A, B] = AB - BA.$$

Zadatak

Odaberite dvije konkretne kvadratne matrice reda 3 i izračunajte im komutator. Što znači ako komutator ispadne nulmatrica? Koliko iznosi komutator od I_n i $A \in M_n$?

Zadatak

Paulijeve matrice spina su tri matrice koje se ponekad koriste za opis spinova elektrona (po jedna za svaki kutni moment):

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$[S_x, S_y], [S_y, S_z], [S_z, S_x], S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

Zadatak

Paulijeve matrice spina su tri matrice koje se ponekad koriste za opis spinova elektrona (po jedna za svaki kutni moment):

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$[S_x, S_y], [S_y, S_z], [S_z, S_x], S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

Zadatak

Izračunajte

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Još malo o sustavima linearnih jednažbi

Svaki sustav linearnih jednažbi može zapisati kao matrična linearna jednažba

$$A \cdot X = B.$$

Još malo o sustavima linearnih jednažbi

Svaki sustav linearnih jednažbi može zapisati kao matrična linearna jednažba

$$A \cdot X = B.$$

Dakle, rješavanje $m \times n$ -sustava linearnih jednažbi je ekvivalentno pitanju određivanju vektora $x \in \mathbb{R}^n$ kojeg linearan operator \hat{A} (s matricom A) preslikava u zadani vektor u kodomeni.

Još malo o sustavima linearnih jednadžbi

Svaki sustav linearnih jednadžbi može zapisati kao matrična linearna jednadžba

$$A \cdot X = B.$$

Dakle, rješavanje $m \times n$ -sustava linearnih jednadžbi je ekvivalentno pitanju određivanju vektora $x \in \mathbb{R}^n$ kojeg linearan operator \hat{A} (s matricom A) preslikava u zadani vektor u kodomeni.

Zadatak

Zapišite sustav $x - y + z = 2$, $x + y = 5$ u matričnom obliku.

Još malo o sustavima linearnih jednadžbi

Svaki sustav linearnih jednadžbi može zapisati kao matrična linearna jednadžba

$$A \cdot X = B.$$

Dakle, rješavanje $m \times n$ -sustava linearnih jednadžbi je ekvivalentno pitanju određivanju vektora $x \in \mathbb{R}^n$ kojeg linearan operator \hat{A} (s matricom A) preslikava u zadani vektor u kodomeni.

Zadatak

Zapišite sustav $x - y + z = 2$, $x + y = 5$ u matričnom obliku.

Zadatak

Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ili nema rješenja ili ima jedinstveno rješenje ili ih ima beskonačno mnogo!

Inverz linearnog operatora

Teorem

Ako je linearan operator \hat{A} bijekcija, onda je i njegova inverzna funkcija \hat{A}^{-1} također linearan operator.

Ako je \hat{A} bijektivan linearan operator, domena i kodomena mu moraju imati istu dimenziju (dakle, matrice su mu kvadratne).

Inverz linearnog operatora

Teorem

Ako je linearan operator \hat{A} bijekcija, onda je i njegova inverzna funkcija \hat{A}^{-1} također linearan operator.

Ako je \hat{A} bijektivni linearan operator, domena i kodomena mu moraju imati istu dimenziju (dakle, matrice su mu kvadratne).

Primjer

Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 3$, $\dim W = 2$. Pretpostavimo da je \hat{A} injekcija. Odaberimo bazu (a, b, c) za domenu. Vektori $\hat{A}a$, $\hat{A}b$ i $\hat{A}c$ su u dvidimenzionalnoj kodomeni, pa moraju biti linearno zavisni. Uzmimo da je $\hat{A}c = \alpha\hat{A}a + \beta\hat{A}b = \hat{A}(\alpha a + \beta b)$, dakle se $v = \alpha a + \beta b$ i c jednako preslikaju putem operatora \hat{A} . No, $v \neq c$ jer je (a, b, c) baza pa su ta tri vektora linearno nezavisna. Dakle, \hat{A} dva različita vektora domene preslika u isti vektor kodomene te ne može biti injekcija.

Primjer

Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 2$, $\dim W = 3$. Pretpostavimo da je \hat{A} surjekcija. Budući da je domena dvodimenzionalna, svi vektori domene su oblika $v = \alpha a + \beta b$, gdje je (a, b) neka odabrana baza domene. Stoga je slika operatora \hat{A} skup svih $\hat{A}v = \alpha\hat{A}a + \beta\hat{A}b$. To je očigledno najviše^a dvodimenzionalni potprostor kodomene pa ne može biti jednak cijeloj trodimenzionalnoj kodomeni.

^aDvodimenzionalan ako su $\hat{A}a$ i $\hat{A}b$ linearno nezavisni, nul-dimenzionalan ako su oba nulvektori, a inače jednodimenzionalan.

Primjer

Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 2$, $\dim W = 3$. Pretpostavimo da je \hat{A} surjekcija. Budući da je domena dvodimenzionalna, svi vektori domene su oblika $v = \alpha a + \beta b$, gdje je (a, b) neka odabrana baza domene. Stoga je slika operatora \hat{A} skup svih $\hat{A}v = \alpha \hat{A}a + \beta \hat{A}b$. To je očigledno najviše^a dvodimenzionalni potprostor kodomene pa ne može biti jednak cijeloj trodimenzionalnoj kodomeni.

^aDvodimenzionalan ako su $\hat{A}a$ i $\hat{A}b$ linearno nezavisni, nul-dimenzionalan ako su oba nulvektori, a inače jednodimenzionalan.

Uzmimo $\hat{A} : V \rightarrow V$, $\dim V = n$. Tada je svaka matrica A od \hat{A} kvadratna matrica reda n .

Primjer

Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 2$, $\dim W = 3$. Pretpostavimo da je \hat{A} surjekcija. Budući da je domena dvodimenzionalna, svi vektori domene su oblika $v = \alpha a + \beta b$, gdje je (a, b) neka odabrana baza domene. Stoga je slika operatora \hat{A} skup svih $\hat{A}v = \alpha\hat{A}a + \beta\hat{A}b$. To je očigledno najviše^a dvodimenzionalni potprostor kodomene pa ne može biti jednak cijeloj trodimenzionalnoj kodomeni.

^aDvodimenzionalan ako su $\hat{A}a$ i $\hat{A}b$ linearno nezavisni, nul-dimenzionalan ako su oba nulvektori, a inače jednodimenzionalan.

Uzmimo $\hat{A} : V \rightarrow V$, $\dim V = n$. Tada je svaka matrica A od \hat{A} kvadratna matrica reda n . Ako je \hat{A} bijekcija i $\hat{A}^{-1} : V \rightarrow V$ pripadni inverzni linearni operator, tj. $\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \hat{I}_V$

Primjer

Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 2$, $\dim W = 3$. Pretpostavimo da je \hat{A} surjekcija. Budući da je domena dvodimenzionalna, svi vektori domene su oblika $v = \alpha a + \beta b$, gdje je (a, b) neka odabrana baza domene. Stoga je slika operatora \hat{A} skup svih $\hat{A}v = \alpha\hat{A}a + \beta\hat{A}b$. To je očigledno najviše^a dvodimenzionalni potprostor kodomene pa ne može biti jednak cijeloj trodimenzionalnoj kodomeni.

^aDvodimenzionalan ako su $\hat{A}a$ i $\hat{A}b$ linearno nezavisni, nul-dimenzionalan ako su oba nulvektori, a inače jednodimenzionalan.

Uzmimo $\hat{A} : V \rightarrow V$, $\dim V = n$. Tada je svaka matrica A od \hat{A} kvadratna matrica reda n . Ako je \hat{A} bijekcija i $\hat{A}^{-1} : V \rightarrow V$ pripadni inverzni linearni operator, tj. $\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \hat{I}_V$ i \hat{A}^{-1} u istoj bazi ima neku kvadratnu matricu B reda n .

Primjer

Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 2$, $\dim W = 3$. Pretpostavimo da je \hat{A} surjekcija. Budući da je domena dvodimenzionalna, svi vektori domene su oblika $v = \alpha a + \beta b$, gdje je (a, b) neka odabrana baza domene. Stoga je slika operatora \hat{A} skup svih $\hat{A}v = \alpha\hat{A}a + \beta\hat{A}b$. To je očigledno najviše^a dvodimenzionalni potprostor kodomene pa ne može biti jednak cijeloj trodimenzionalnoj kodomeni.

^aDvodimenzionalan ako su $\hat{A}a$ i $\hat{A}b$ linearno nezavisni, nul-dimenzionalan ako su oba nulvektori, a inače jednodimenzionalan.

Uzmimo $\hat{A} : V \rightarrow V$, $\dim V = n$. Tada je svaka matrica A od \hat{A} kvadratna matrica reda n . Ako je \hat{A} bijekcija i $\hat{A}^{-1} : V \rightarrow V$ pripadni inverzni linearni operator, tj. $\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \hat{I}_V$ i \hat{A}^{-1} u istoj bazi ima neku kvadratnu matricu B reda n . Prema definiciji množenja matrica mora vrijediti $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Inverz matrice

Definicija

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen *inverz (inverzna matrica od A)* je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom).

Inverz matrice

Definicija

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen *inverz (inverzna matrica od A)* je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom).

Zadatak

Odredite inverz matrice operatora skaliranja s 2 na četverodimenzionalnom prostoru.

Inverz matrice

Definicija

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen *inverz (inverzna matrica od A)* je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom).

Zadatak

Odredite inverz matrice operatora skaliranja s 2 na četverodimenzionalnom prostoru.

Zadatak

Jesu li matrice 0_n i I_n invertibilne? Ako da, što su im inverzi?

Zadatak

Neka je $\hat{P} : V^2(0) \rightarrow V^2(0)$ ortogonalna projekcija na neki pravac o kroz O . Odredite mu matricu u nekoj prikladno odabranoj bazi. Je li taj operator invertibilan?

Zadatak

Neka je $\hat{P} : V^2(0) \rightarrow V^2(0)$ ortogonalna projekcija na neki pravac o kroz O . Odredite mu matricu u nekoj prikladno odabranoj bazi. Je li taj operator invertibilan?

Zadatak

Neka je $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan kao tzv. pomak ulijevo:
 $\hat{A}(x, y, z) = (y, z, 0)$. Odredite mu matricu u kanonskoj bazi. Je li ta matrica invertibilna?

Zadatak

Neka je $\hat{P} : V^2(0) \rightarrow V^2(0)$ ortogonalna projekcija na neki pravac o kroz O . Odredite mu matricu u nekoj prikladno odabranoj bazi. Je li taj operator invertibilan?

Zadatak

Neka je $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan kao tzv. pomak ulijevo:
 $\hat{A}(x, y, z) = (y, z, 0)$. Odredite mu matricu u kanonskoj bazi. Je li ta matrica invertibilna?

Teorem

Ako je V netrivialan i ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ kojeg linearni operator \hat{A} preslika u $\mathbf{0}$, onda \hat{A} nije invertibilan.

Zadatak

Neka je $\hat{P} : V^2(0) \rightarrow V^2(0)$ ortogonalna projekcija na neki pravac o kroz O . Odredite mu matricu u nekoj prikladno odabranoj bazi. Je li taj operator invertibilan?

Zadatak

Neka je $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan kao tzv. pomak ulijevo:
 $\hat{A}(x, y, z) = (y, z, 0)$. Odredite mu matricu u kanonskoj bazi. Je li ta matrica invertibilna?

Teorem

Ako je V netrivialan i ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ kojeg linearni operator \hat{A} preslika u $\mathbf{0}$, onda \hat{A} nije invertibilan.

Postoji beskonačno mnogo matrica u M_n , za svaki n , koje nisu invertibilne, primjerice sve matrice koje sadrže nulstupac.

Zadatak

Neka je $\hat{P} : V^2(0) \rightarrow V^2(0)$ ortogonalna projekcija na neki pravac o kroz O . Odredite mu matricu u nekoj prikladno odabranoj bazi. Je li taj operator invertibilan?

Zadatak

Neka je $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan kao tzv. pomak ulijevo:
 $\hat{A}(x, y, z) = (y, z, 0)$. Odredite mu matricu u kanonskoj bazi. Je li ta matrica invertibilna?

Teorem

Ako je V netrivialan i ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ kojeg linearni operator \hat{A} preslika u $\mathbf{0}$, onda \hat{A} nije invertibilan.

Postoji beskonačno mnogo matrica u M_n , za svaki n , koje nisu invertibilne, primjerice sve matrice koje sadrže nulstupac.

Cramerovi sustavi linearnih jednadžbi

Neka je

$$AX = B$$

matrični zapis $n \times n$ -sustava linearnih jednadžbi. Ako je A invertibilna,

Cramerovi sustavi linearnih jednadžbi

Neka je

$$AX = B$$

matrični zapis $n \times n$ -sustava linearnih jednadžbi. Ako je A invertibilna, onda je

$$X = A^{-1} B :$$

Teorem

Ako je matrica A koeficijenata $n \times n$ -sustava $AX = B$ invertibilna, taj sustav je Cramerov, tj. ima jedinstveno rješenje.

Je li gornja formula korisna za rješavanje $n \times n$ -sustava linearnih jednadžbi?

Inverz 2×2 -matrice

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Zadatak

Izračunajte inverz matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Inverzi ortogonalnih matrica

Zadatak

Što je inverzni operator operatora rotacije za kut $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ oko nekog centra odnosno osi?

Inverzi ortogonalnih matrica

Zadatak

Što je inverzni operator operatora rotacije za kut $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ oko nekog centra odnosno osi? Ako je $R_{z,\phi}$ matrica rotacije za kut ϕ oko z-osi Kartezijevog koordinatnog sustava, koja joj je inverzna matrica?

Inverzi ortogonalnih matrica

Zadatak

Što je inverzni operator operatora rotacije za kut $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ oko nekog centra odnosno osi? Ako je $R_{z,\phi}$ matrica rotacije za kut ϕ oko z-osi Kartezijevog koordinatnog sustava, koja joj je inverzna matrica?

Definicija

Transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ je matrica $A^t \in M_{n,m}$ koja na poziciji (i, j) ima a_{ji} .

Primjer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorem

$A \in M_n$ je ortogonalna točno ako je

$$A A^t = A^t A = I_n,$$

tj. točno ako je $A^{-1} = A^t$.

Posebno, inverzna matrica bilo kojeg operatora simetrije je njezina transponirana matrica, uz uvjet da se radi o matrici tog operatora s obzirom na neku ortonorminarnu bazu.

Teorem

$A \in M_n$ je ortogonalna točno ako je

$$A A^t = A^t A = I_n,$$

tj. točno ako je $A^{-1} = A^t$.

Posebno, inverzna matrica bilo kojeg operatora simetrije je njezina transponirana matrica, uz uvjet da se radi o matrici tog operatora s obzirom na neku ortonormiranu bazu.

Zadatak

S obzirom na ortonormiranu bazu za $V^3(O)$ odredite matricu inverza rotoreinverzije reda 4 kojoj je os rotacijske komponente y -os.

Teorem

$A \in M_n$ je ortogonalna točno ako je

$$A A^t = A^t A = I_n,$$

tj. točno ako je $A^{-1} = A^t$.

Posebno, inverzna matrica bilo kojeg operatora simetrije je njezina transponirana matrica, uz uvjet da se radi o matrici tog operatora s obzirom na neku ortonorminarnu bazu.

Zadatak

S obzirom na ortonormiranu bazu za $V^3(O)$ odredite matricu inverza rotoreinverzije reda 4 kojoj je os rotacijske komponente y -os.

Matricu nazivamo **simetričnom** ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici. Objasnite zašto simetrične matrice moraju biti kvadratne!

Primjer

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je simetrična.

Primjer

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je simetrična.

Zadatak

Koje kvadratne matrice redova 2 i 3 mogu biti istovremeno ortogonalne i simetrične?

Primjer

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je simetrična.

Zadatak

Koje kvadratne matrice redova 2 i 3 mogu biti istovremeno ortogonalne i simetrične?

Zadatak

Za kompleksne matrice A definiramo njihove hermitski konjugirane matrice s $A^ = (\overline{a_{ij}})^t$. Matrica je hermitska ako je $A = A^*$. Hermitske matrice moraju biti kvadratne i na dijagonali imati realne brojeve — dokažite!*

Postupak računanja inverza matrice

Zadatak

Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je li A invertibilna i ako jest, odredite joj inverz!

Postupak računanja inverza matrice

Zadatak

Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je li A invertibilna i ako jest, odredite joj inverz!

Određivanje inverza matrice $A \in M_n$ ekvivalentno je rješavanju $n^2 \times n^2$ -sustava linearnih jednadžbi koji proizlazi iz uvjeta $A \cdot A^{-1} = I_n$. Nepoznanice u tom sustavu su elementi od A^{-1} , a po jedna jednadžba proizlazi iz izjednačavanja svih pozicija od $A \cdot A^{-1}$ s odgovarajućim pozicijama u I_n .

Postupak računanja inverza matrice

Zadatak

Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je li A invertibilna i ako jest, odredite joj inverz!

Određivanje inverza matrice $A \in M_n$ ekvivalentno je rješavanju $n^2 \times n^2$ -sustava linearnih jednadžbi koji proizlazi iz uvjeta $A \cdot A^{-1} = I_n$. Nepoznanice u tom sustavu su elementi od A^{-1} , a po jedna jednadžba proizlazi iz izjednačavanja svih pozicija od $A \cdot A^{-1}$ s odgovarajućim pozicijama u I_n . Zapravo, matricu A^{-1} možemo odrediti rješavanjem n sustava tipa $n \times n$ koji su svi oblika $A \cdot X_j = I_j$, gdje je X_j nepoznati j -ti stupac od A^{-1} , a I_j je j -ti stupac jedinične matrice.

Postupak računanja inverza matrice

Zadatak

Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je li A invertibilna i ako jest, odredite joj inverz!

Određivanje inverza matrice $A \in M_n$ ekvivalentno je rješavanju $n^2 \times n^2$ -sustava linearnih jednadžbi koji proizlazi iz uvjeta $A \cdot A^{-1} = I_n$. Nepoznanice u tom sustavu su elementi od A^{-1} , a po jedna jednadžba proizlazi iz izjednačavanja svih pozicija od $A \cdot A^{-1}$ s odgovarajućim pozicijama u I_n . Zapravo, matricu A^{-1} možemo odrediti rješavanjem n sustava tipa $n \times n$ koji su svi oblika $A \cdot X_j = I_j$, gdje je X_j nepoznati j -ti stupac od A^{-1} , a I_j je j -ti stupac jedinične matrice. Svih tih n sustava možemo riješiti paralelno pa imamo:

Postupak za određivanje inverza matrice

Primijenimo Gaußovom metodom eliminacija na matricu $[A|I_n]$ dok ne dobijemo oblik $[I_n|B]$. Ako smo uspjeli dobiti taj oblik, onda je $A^{-1} = B$, a ako u lijevom dijelu ne uspijemo dobiti jediničnu matricu, A nije invertibilna.

Postupak za određivanje inverza matrice

Primijenimo Gaußovom metodom eliminacija na matricu $[A|I_n]$ dok ne dobijemo oblik $[I_n|B]$. Ako smo uspjeli dobiti taj oblik, onda je $A^{-1} = B$, a ako u lijevom dijelu ne uspijemo dobiti jediničnu matricu, A nije invertibilna.

Zadatak

Provjerite invertibilnost i ako je invertibilna odredite inverz matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$