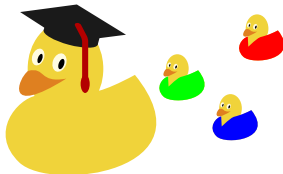


7. tema: Determinante

Franka Miriam Brückler



Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?

Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?

Definicija

*Broj $\det A$ koji karakterizira invertibilnost kvadratne matrice A (ako je jednak 0, matrica nema inverz, a ako je različit od 0, ima ga) naziva se **determinantom matrice A** .*

Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?

Definicija

Broj $\det A$ koji karakterizira invertibilnost kvadratne matrice A (ako je jednak 0, matrica nema inverz, a ako je različit od 0, ima ga) naziva se **determinantom matrice A** .

Za kvadratne matrice reda 3 praktično je **Sarrusovo pravilo**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ (a_{21}) & a_{22} & a_{23} & a_{21} & (a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = ? \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Laplaceov razvoj

Postupak

Laplaceov razvoj po nekom retku (ili stupcu) izračunava determinantu matrice $A \in M_n$ tako da svaki element tog retka (odnosno stupca) pomnoži s determinantom matrice koju bismo iz A dobili tako da iz nje pobrišemo redak i stupac promatranog elementa. Tako dobivenih n umnožaka naizmjenično zbrajamo i oduzimamo.

Kod razvoja po neparnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja je $+ - + - + - \dots$, a kod razvoja po parnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja kreće s $-$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

Cramerovo pravilo

Cramerov sustav je $n \times n$ -sustav s jedinstvenim rješenjem (tj. sustav $AX = B$ s invertibilnom A). Komponente rješenja takvog sustava su

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je $D = \det(A)$, a D_i je determinanta matrice koju iz A dobijemo tako da joj i -ti stupac zamijenimo stupcem slobodnih članova B .

Cramerovo pravilo

Cramerov sustav je $n \times n$ -sustav s jedinstvenim rješenjem (tj. sustav $AX = B$ s invertibilnom A). Komponente rješenja takvog sustava su

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je $D = \det(A)$, a D_i je determinanta matrice koju iz A dobijemo tako da joj i -ti stupac zamijenimo stupcem slobodnih članova B .

Zadatak

Za kakve m i n sustav

$$m x + n y = 1, \quad x + y = m n$$

ima jedinstveno rješenje?

Cramerovo pravilo

Cramerov sustav je $n \times n$ -sustav s jedinstvenim rješenjem (tj. sustav $AX = B$ s invertibilnom A). Komponente rješenja takvog sustava su

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je $D = \det(A)$, a D_i je determinanta matrice koju iz A dobijemo tako da joj i -ti stupac zamijenimo stupcem slobodnih članova B .

Zadatak

Za kakve m i n sustav

$$mx + ny = 1, \quad x + y = mn$$

ima jedinstveno rješenje?

Koje su mane Cramerovog pravila?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice „na prvi pogled“ vidimo da im je determinanta nula?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice „na prvi pogled“ vidimo da im je determinanta nula?
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice „na prvi pogled“ vidimo da im je determinanta nula?
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
Gornje-/donjetrokutaste matrice su kvadratne matrice čiji svi elementi ispod/iznad dijagonale su 0. Matrice koje su istovremeno gornje- i donjetrokutaste zovu se **dijagonalne**. Determinanta gornjetrokutaste, donjetrokutaste ili dijagonalne matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.
- Koliko iznosi $\det(I_n - A)$, gdje je A $n \times n$ -matrica koja na dijagonali ima jedinice, iznad dijagonale nule, a ispod dijagonale (dakle, za $i > j$) su joj elementi $a_{ij} = i j$?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice „na prvi pogled“ vidimo da im je determinanta nula?
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
Gornje-/donjetrokutaste matrice su kvadratne matrice čiji svi elementi ispod/iznad dijagonale su 0. Matrice koje su istovremeno gornje- i donjetrokutaste zovu se **dijagonalne**. Determinanta gornjetrokutaste, donjetrokutaste ili dijagonalne matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.
- Koliko iznosi $\det(I_n - A)$, gdje je A $n \times n$ -matrica koja na dijagonali ima jedinice, iznad dijagonale nule, a ispod dijagonale (dakle, za $i > j$) su joj elementi $a_{ij} = i j$?
- Je li $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ linearni funkcional?

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.
- Množenje retka (ili stupca) matrice A brojem α rezultira matricom čija determinanta je $\alpha^n \det A$.

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.
- Množenje retka (ili stupca) matrice A brojem α rezultira matricom čija determinanta je $\alpha^n \det A$.
- Pribrajanje višekratnika nekog retka drugom retku (ili višekratnika nekog stupca drugom stupcu) ne mijenja determinantu.

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.
- Množenje retka (ili stupca) matrice A brojem α rezultira matricom čija determinanta je $\alpha^n \det A$.
- Pribrajanje višekratnika nekog retka drugom retku (ili višekratnika nekog stupca drugom stupcu) ne mijenja determinantu.
- Ako matrica ima dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0, tj. matrica nije invertibilna.

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.
- Množenje retka (ili stupca) matrice A brojem α rezultira matricom čija determinanta je $\alpha^n \det A$.
- Pribrajanje višekratnika nekog retka drugom retku (ili višekratnika nekog stupca drugom stupcu) ne mijenja determinantu.
- Ako matrica ima dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0, tj. matrica nije invertibilna..
- **Binet-Cauchy-jev teorem:** $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.
- Množenje retka (ili stupca) matrice A brojem α rezultira matricom čija determinanta je $\alpha^n \det A$.
- Pribrajanje višekratnika nekog retka drugom retku (ili višekratnika nekog stupca drugom stupcu) ne mijenja determinantu.
- Ako matrica ima dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0, tj. matrica nije invertibilna..
- **Binet-Cauchy-jev teorem:** $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Koja je veza između determinante invertibilne matrice i determinante njezinog inverza?

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.
- Množenje retka (ili stupca) matrice A brojem α rezultira matricom čija determinanta je $\alpha^n \det A$.
- Pribrajanje višekratnika nekog retka drugom retku (ili višekratnika nekog stupca drugom stupcu) ne mijenja determinantu.
- Ako matrica ima dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0, tj. matrica nije invertibilna..
- **Binet-Cauchy-jev teorem:** $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Koja je veza između determinante invertibilne matrice i determinante njezinog inverza?
- Dokažite da determinanta ortogonalne matrice može biti samo 1 ili -1 !

- Zamjena dva retka (ili dva stupca) u matrici mijenja predznak determinante.
- Množenje retka (ili stupca) matrice A brojem α rezultira matricom čija determinanta je $\alpha^n \det A$.
- Pribrajanje višekratnika nekog retka drugom retku (ili višekratnika nekog stupca drugom stupcu) ne mijenja determinantu.
- Ako matrica ima dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0, tj. matrica nije invertibilna..
- **Binet-Cauchy-jev teorem:** $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Koja je veza između determinante invertibilne matrice i determinante njezinog inverza?
- Dokažite da determinanta ortogonalne matrice može biti samo 1 ili -1 !
- **Invarijante linearnih operatora** su svojstva zajednička svim matricama danog linearnog operatora: iznosi traga i determinante,

Još malo o $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Teorem (Kristalografska restrikcija)

Rotacije koje su simetrije rešetke u dvo- ili trodimenzionalnom prostoru mogu biti samo redova 1, 2, 3, 4 i 6.

Dokažimo kristalografsku restrikciju!

Još malo o $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Teorem (Kristalografska restrikcija)

Rotacije koje su simetrije rešetke u dvo- ili trodimenzionalnom prostoru mogu biti samo redova 1, 2, 3, 4 i 6.

Dokažimo kristalografsku restrikciju!

Zadatak

Parametrima $a = b = 2$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ je zadana baza prostora $V^3(O)$. Linearan operator \hat{A} na $V^3(O)$ zadan je s $\hat{A}\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $\hat{A}\vec{b} = 2\vec{b}$, $\hat{A}\vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$. Je li taj operator operator simetrije? Postoji li \vec{v} takav da je $\hat{A}\vec{v} = [2, 1, 1]^T$? $[0, 5, 4]^T$?

Još malo o $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Teorem (Kristalografska restrikcija)

Rotacije koje su simetrije rešetke u dvo- ili trodimenzionalnom prostoru mogu biti samo redova 1, 2, 3, 4 i 6.

Dokažimo kristalografsku restrikciju!

Zadatak

Parametrima $a = b = 2$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ je zadana baza prostora $V^3(O)$. Linearan operator \hat{A} na $V^3(O)$ zadan je s $\hat{A}\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $\hat{A}\vec{b} = 2\vec{b}$, $\hat{A}\vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$. Je li taj operator operator simetrije? Postoji li \vec{v} takav da je $\hat{A}\vec{v} = [2, 1, 1]$? $[0, 5, 4]$?

Zadatak

Je li sljedeća matrica matrica operatora simetrije u nekoj bazi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}?$$

Operatori simetrije kojima je determinanta -1 (primjerice sva zrcaljenja te centralna simetrija, rotoinverzije i rotorefleksije na $V^3(O)$) zamjenjuju lijevo i desno, tj. ne mogu biti simetrije kiralnih objekata, dok operatori simetrije kojima je determinanta 1 čuvaju lijevo i desno (primjerice, jedinični operator i sve rotacije).

Operatori simetrije kojima je determinanta -1 (primjerice sva zrcaljenja te centralna simetrija, rotoinverzije i rotorefleksije na $V^3(O)$) zamjenjuju lijevo i desno, tj. ne mogu biti simetrije kiralnih objekata, dok operatori simetrije kojima je determinanta 1 čuvaju lijevo i desno (primjerice, jedinični operator i sve rotacije).

Teorem

Svaka izometrija prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$, dakle svaka simetrija nekog 2D- ili 3D-objekta, može se zapisati kao kompozicija jedne translacije i jednog operatora simetrije: $F(\vec{v}) = \hat{A}\vec{v} + \vec{t}$.

Operatori simetrije kojima je determinanta -1 (primjerice sva zrcaljenja te centralna simetrija, rotoinverzije i rotorefleksije na $V^3(O)$) zamjenjuju lijevo i desno, tj. ne mogu biti simetrije kiralnih objekata, dok operatori simetrije kojima je determinanta 1 čuvaju lijevo i desno (primjerice, jedinični operator i sve rotacije).

Teorem

Svaka izometrija prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$, dakle svaka simetrija nekog 2D- ili 3D-objekta, može se zapisati kao kompozicija jedne translacije i jednog operatora simetrije: $F(\vec{v}) = \hat{A}\vec{v} + \vec{t}$.

Simetrije kristalnih struktura fiksiraju kristalnu rešetku. Ako je fiksirana (kristalografska) baza \mathcal{B} te ako su $A \in M_3$ i $T \in M_{3,1}$ matrice od \hat{A} odnosno \vec{t} s obzirom na \mathcal{B} , definira se **Seitzova matrica** simetrije F :

$$\mathcal{F} = \left(\begin{array}{c|c} A & T \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \in M_4.$$

Koje su moguće determinante Seitzove matrice?

Zadatak

Dokažite da je inverzna matrica Seitzove matrice simetrije F jednaka Seitzovoj matrici od F^{-1} .

Zadatak

Dokažite da je inverzna matrica Seitzove matrice simetrije F jednaka Seitzovoj matrici od F^{-1} .

Zadatak

Ispišite sve Seitzove matrice za slučaj tetragonske kristalne rešetke ($a = b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$)!

Zadatak

Dokažite da je inverzna matrica Seitzove matrice simetrije F jednaka Seitzovoj matrici od F^{-1} .

Zadatak

Ispišite sve Seitzove matrice za slučaj tetragonske kristalne rešetke ($a = b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$)!

Teorem

Za svaku bazu \mathcal{B} od $V^3(O)$ je $V = +\sqrt{\det M}$, gdje je M metrički tenzor baze \mathcal{B} .

Dokaz. $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$,

$$M = \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{pmatrix};$$

Vektori baze \mathcal{B} mogu se zapisati svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi: $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$,
 $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3] \Rightarrow$

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det A \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} V^2 &= \det(A)^2 = \det(A) \det(A) = \det(A) \det(A^t) = \det(A A^t) = \\ &= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vektori baze \mathcal{B} mogu se zapisati svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi: $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$,
 $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3] \Rightarrow$

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det A \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} V^2 &= \det(A)^2 = \det(A) \det(A) = \det(A) \det(A^t) = \det(A A^t) = \\ &= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vrijedi i:

$$[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = (x \ y \ z) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Zadatak

Za parametre baze kao u primjeru ?? izračunajte metričke tenzore direktne i recipročne baze, d_{310} , iznose vektora $[3, 1, 0]$, $[3, 1, 0]^$, kut među njima, površinu paralelograma kojeg ta dva vektora razapinju i njihov vektorski produkt.*

Zadatak

Za parametre baze kao u primjeru ?? izračunajte metričke tenzore direktne i recipročne baze, d_{310} , iznose vektora $[3, 1, 0]$, $[3, 1, 0]^$, kut među njima, površinu paralelograma kojeg ta dva vektora razapinju i njihov vektorski produkt.*

Zadatak

Za neki kristal pripadna kristalografska direktna baza ima parametre $a = b = c = 255 \text{ \AA}$, $\alpha = \beta = \gamma = 75,5^\circ$. Izračunajte d_{111} , V^ i kut između vektora \vec{a} i \vec{a}^* .*

Zadatak

Za parametre baze kao u primjeru ?? izračunajte metričke tenzore direktne i recipročne baze, d_{310} , iznose vektora $[3, 1, 0]$, $[3, 1, 0]^$, kut među njima, površinu paralelograma kojeg ta dva vektora razapinju i njihov vektorski produkt.*

Zadatak

Za neki kristal pripadna kristalografska direktna baza ima parametre $a = b = c = 255 \text{ \AA}$, $\alpha = \beta = \gamma = 75,5^\circ$. Izračunajte d_{111} , V^ i kut između vektora \vec{a} i \vec{a}^* .*

Zadatak

Dokažite da je za svaku direktnu bazu metrički tenzor njezine recipročne baze inverz njenog metričkog tenzora.