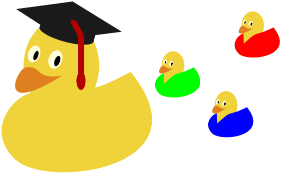
8. tema: Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Franka Miriam Brückler



Zadatak

Koji vektori prostora ne promijene smjer pri djelovanju linearnog operatora:

- *Na* $V^2(O)$*:*
  - *pri rotaciji oko* O*?*

Zadatak

Koji vektori prostora ne promijene smjer pri djelovanju linearnog operatora:

- *Na* $V^2(O)$:
  - *pri rotaciji oko* O?
  - *pri zrcaljenju s obzirom na pravac kroz* O?

Zadatak

Koji vektori prostora ne promijene smjer pri djelovanju linearnog operatora:

- *Na* $V^2(O)$*:*
  - *pri rotaciji oko* O*?*
  - *pri zrcaljenju s obzirom na pravac kroz* O*?*
- *Na* $V^3(O)$*:*
  - *pri centralnoj simetriji s obzirom na* O*?*

Zadatak

Koji vektori prostora ne promijene smjer pri djelovanju linearnog operatora:

- *Na* $V^2(O)$*:*
  - *pri rotaciji oko* O*?*
  - *pri zrcaljenju s obzirom na pravac kroz* O*?*
- *Na* $V^3(O)$*:*
  - *pri centralnoj simetriji s obzirom na* O*?*
  - *pri rotaciji oko pravca kroz* O*?*

Zadatak

Koji vektori prostora ne promijene smjer pri djelovanju linearnog operatora:

- *Na* $V^2(O)$*:*
  - *pri rotaciji oko* O*?*
  - *pri zrcaljenju s obzirom na pravac kroz* O*?*
- *Na* $V^3(O)$*:*
  - *pri centralnoj simetriji s obzirom na* O*?*
  - *pri rotaciji oko pravca kroz* O*?*
  - *pri zrcaljenju s obzirom na ravninu kroz* O*?*

Zadatak

Koji vektori prostora ne promijene smjer pri djelovanju linearnog operatora:

- *Na* $V^2(O)$*:*
  - *pri rotaciji oko* O*?*
  - *pri zrcaljenju s obzirom na pravac kroz* O*?*
- *Na* $V^3(O)$*:*
  - *pri centralnoj simetriji s obzirom na* O*?*
  - *pri rotaciji oko pravca kroz* O*?*
  - *pri zrcaljenju s obzirom na ravninu kroz* O*?*

Zadatak

Ako je $\hat{S}_\alpha : V \to V$ *operator skaliranja, za koje vektore* V *iz* V *je* $\hat{S}_\alpha v$ *oblik skalar puta isti taj* v*?*

Primjer

Neka je linearan operator na $M_{3,1}$ *zadan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator nenul-vektor domene koji se preslika u sebi proporcionalan?

Primjer

Neka je linearan operator na $M_{3,1}$ *zadan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator nenul-vektor domene koji se preslika u sebi proporcionalan?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y \\ x + 2y + z \end{pmatrix} =$$

Primjer

Neka je linearan operator na $M_{3,1}$ *zadan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator nenul-vektor domene koji se preslika u sebi proporcionalan?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y \\ x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, x \\ \alpha\, y \\ \alpha\, z \end{pmatrix}.$$

Primjer

Neka je linearan operator na $M_{3,1}$ zadan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator nenul-vektor domene koji se preslika u sebi proporcionalan?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y \\ x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, x \\ \alpha\, y \\ \alpha\, z \end{pmatrix}.$$

- $y \neq 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow 2y + 3z = x + 2y = 0$

Primjer

Neka je linearan operator na $M_{3,1}$ zadan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator nenul-vektor domene koji se preslika u sebi proporcionalan?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y \\ x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, x \\ \alpha\, y \\ \alpha\, z \end{pmatrix}.$$

- $y \neq 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow 2y + 3z = x + 2y = 0 \Rightarrow$ $(x, y, z) = (6t, -3t, 2t),\ t \in \mathbb{R}$

Primjer

Neka je linearan operator na $M_{3,1}$ *zadan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator nenul-vektor domene koji se preslika u sebi proporcionalan?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y \\ x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, x \\ \alpha\, y \\ \alpha\, z \end{pmatrix}.$$

- $y \neq 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow 2y + 3z = x + 2y = 0 \Rightarrow$ $(x, y, z) = (6t, -3t, 2t),\ t \in \mathbb{R}$
- $y = 0 \Rightarrow (1 - \alpha)x + 3z = x + (1 - \alpha)z = 0\ \ldots$

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstveni vektori su vektori koje linearan operator preslikava u svoje skalarne višekratnike. Zato pitanje svojstvenih vektora ima smisla samo za linearne operatore

$$\hat{A} : V \to V$$

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstveni vektori su vektori koje linearan operator preslikava u svoje skalarne višekratnike. Zato pitanje svojstvenih vektora ima smisla samo za linearne operatore

$$\hat{A} : V \to V.$$

Definicija

Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je

$$\hat{A}v = \lambda v$$

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstveni vektori su vektori koje linearan operator preslikava u svoje skalarne višekratnike. Zato pitanje svojstvenih vektora ima smisla samo za linearne operatore

$$\hat{A} : V \to V.$$

Definicija

Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

Ako je λ svojstvena vrijednost od $\hat{A}$, svaki $v \in V$ koji zadovoljava gornju jednakost zovemo svojstvenim vektorom operatora $\hat{A}$ (pridruženim svojstvenoj vrijednosti λ).

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstveni vektori su vektori koje linearan operator preslikava u svoje skalarne višekratnike. Zato pitanje svojstvenih vektora ima smisla samo za linearne operatore

$$\hat{A} : V \to V.$$

Definicija

Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

Ako je λ svojstvena vrijednost od $\hat{A}$, svaki $v \in V$ koji zadovoljava gornju jednakost zovemo svojstvenim vektorom operatora $\hat{A}$ (pridruženim svojstvenoj vrijednosti λ). Skup svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora zove se spektar operatora.

Primjer

Stacionarna Schrödingerova jednadžba $\hat{H}\psi = E\psi$ *je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstvene vrijednosti Hamiltonijana su moguće energije sustava.*

Primjer

Stacionarna Schrödingerova jednadžba $\hat{H}\psi = E\psi$ *je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstvene vrijednosti Hamiltonijana su moguće energije sustava.*

Teorem

Skup svih svojstvenih vektora linearnog operatora $\hat{A}$ *na* V *koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti* λ *čine potprostor od* V*, tzv. svojstveni potprostor* $V_{\hat{A},\lambda}$.

Primjer

Stacionarna Schrödingerova jednadžba $\hat{H}\psi = E\psi$ je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstvene vrijednosti Hamiltonijana su moguće energije sustava.

Teorem

Skup svih svojstvenih vektora linearnog operatora $\hat{A}$ na V koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti λ čine potprostor od V, tzv. svojstveni potprostor $V_{\hat{A},\lambda}$.

Zadatak

Odredite spektre i svojstvene potprostore svih operatora na prvom slide-u ove prezentacije!

Za svojstvenu vrijednost kažemo da je degenerirana ako je odgovarajući svojstveni potprostor dimenzije veće od 1.

Zadatak

Koje od svojstvenih vrijednosti iz prethodnog zadatka su degenerirane?

Za svojstvenu vrijednost kažemo da je degenerirana ako je odgovarajući svojstveni potprostor dimenzije veće od 1.

Zadatak

Koje od svojstvenih vrijednosti iz prethodnog zadatka su degenerirane?

Primjer

U kvantnoj mehanici u slučaju degeneriranih svojstvenih vrijednosti govorimo o degeneriranom stanju sustava. Primjerice, za energetske nivoe (svojstvene vrijednosti Hamiltonijana) opisane glavnim kvantnim brojem $n > 1$ *i azimutnim kvantnim brojem* $0 < l < n$ *dolazi do degeneracija, tj. postoji više neproporcionalnih valnih funkcija (različitih orbitala, primjerice za* $l = 1$ *i* $n = 2$ *imamo 3 tzv. 2p-orbitale, koje opisuju elektrone s istom energijom).*

Za svojstvenu vrijednost kažemo da je degenerirana ako je odgovarajući svojstveni potprostor dimenzije veće od 1.

Zadatak

Koje od svojstvenih vrijednosti iz prethodnog zadatka su degenerirane?

Primjer

U kvantnoj mehanici u slučaju degeneriranih svojstvenih vrijednosti govorimo o degeneriranom stanju sustava. Primjerice, za energetske nivoe (svojstvene vrijednosti Hamiltonijana) opisane glavnim kvantnim brojem $n > 1$ *i azimutnim kvantnim brojem* $0 < l < n$ *dolazi do degeneracija, tj. postoji više neproporcionalnih valnih funkcija (različitih orbitala, primjerice za* $l = 1$ *i* $n = 2$ *imamo 3 tzv. 2p-orbitale, koje opisuju elektrone s istom energijom).*

Teorem

Linearni operator je invertibilan točno ako mu spektar ne sadrži 0.

Zadatak

Za rotoinverziju reda 4 na $V^3(O)$ odredite sve svojstvene vrijednosti i dimenzije pripadnih svojstvenih potprostora.

Zadatak

Za rotoinverziju reda 4 na $V^3(O)$ odredite sve svojstvene vrijednosti i dimenzije pripadnih svojstvenih potprostora.

Teorem

Svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora (operatora simetrije) mogu biti samo 1 i -1.

Zadatak

Za rotoinverziju reda 4 na $V^3(O)$ odredite sve svojstvene vrijednosti i dimenzije pripadnih svojstvenih potprostora.

Teorem

Svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora (operatora simetrije) mogu biti samo 1 i -1.

Koje invarijante linearnih operatora smo dosad spomenuli?

Zadatak

Za rotoinverziju reda 4 na $V^3(O)$ odredite sve svojstvene vrijednosti i dimenzije pripadnih svojstvenih potprostora.

Teorem

Svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora (operatora simetrije) mogu biti samo 1 *i* -1.

Koje invarijante linearnih operatora smo dosad spomenuli? Ako je $\hat{A}$ neki operator simetrije, determinanta mu je 1 ili -1 i jedine moguće svojstvene vrijednosti su mu ± 1. Ako ima determinantu -1, radi se o centralnoj simetriji, zrcaljenju, rotoinverziji ili rotorefleksiji, a ako ima determinantu 1, onda se radi o rotaciji.

Zadatak

Za rotoinverziju reda 4 na $V^3(O)$ odredite sve svojstvene vrijednosti i dimenzije pripadnih svojstvenih potprostora.

Teorem

Svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora (operatora simetrije) mogu biti samo 1 *i* -1.

Koje invarijante linearnih operatora smo dosad spomenuli? Ako je $\hat{A}$ neki operator simetrije, determinanta mu je 1 ili -1 i jedine moguće svojstvene vrijednosti su mu ± 1. Ako ima determinantu -1, radi se o centralnoj simetriji, zrcaljenju, rotoinverziji ili rotorefleksiji, a ako ima determinantu 1, onda se radi o rotaciji. Ako je $\hat{A}$ rotacija, onda (kao u dokazu kristalografske restrikcije) znamo i da je $\mathrm{tr}\hat{A} = 1 + 2\cos\varphi$, tj. kut rotacije je $\arccos\frac{\mathrm{tr}\hat{A}-1}{2}$. Os rotacije je pravac na kojem leži bilo koji od nenul-svojstvenih vektora.

Računanje svojstvenih vrijednosti i vektora

$\hat{A} : V \to V$, $\dim V = n$,

Računanje svojstvenih vrijednosti i vektora

$\hat{A} : V \to V$, $\dim V = n$, $A \in M_n$ neka matrica od $\hat{A}$

Računanje svojstvenih vrijednosti i vektora

$\hat{A} : V \to V$, $\dim V = n$, $A \in M_n$ neka matrica od $\hat{A}$

$$A\,v = \lambda\,v \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}$$

Računanje svojstvenih vrijednosti i vektora

$\hat{A} : V \to V$, $\dim V = n$, $A \in M_n$ neka matrica od $\hat{A}$

$$A\,v = \lambda\,v \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}$$

Teorem

Ako je $A \in M_n$ matrica linearnog operatora $\hat{A}$, svojstvene vrijednosti operatora $\hat{A}$ su rješenja jednadžbe (stupnja n)

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ta jednadžba se zove se karakterističnom jednadžbom (a $\det(A - \lambda I_n)$ je karakteristični polinom) operatora $\hat{A}$ (odnosno, matrice A).

Dakle, invarijante linearnih operatora su: trag, determinanta, spektar, karakteristični polinom. ...

Zadatak

Zašto linearni operatori na $V^3(O)$ sigurno imaju bar jednu svojstvenu vrijednost?

Zadatak

Zašto linearni operatori na $V^3(O)$ sigurno imaju bar jednu svojstvenu vrijednost?

Ako smo odredili spektar od $\hat{A}$, za svaki λ u spektru odgovarajući svojstveni potprostor je skup rješenja homogenog sustava $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$.

Zadatak

Odredite spektar i baze svojstvenih potprostora linearnog operatora koji je zadan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zadatak

Ako $\hat{A} : V^2(0) \to V^2(O)$ *s obzirom na neku bazu* $(\vec{a}, \vec{b})$ *ima matricu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

koje su mu svojstvene vrijednosti? A baze svojstvenih potprostora?

Zadatak

Ako $\hat{A} : V^2(0) \to V^2(O)$ *s obzirom na neku bazu* $(\vec{a}, \vec{b})$ *ima matricu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

koje su mu svojstvene vrijednosti? A baze svojstvenih potprostora?

Teorem

Svojstvene vrijednosti linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$ *kojemu u nekoj bazi* $\mathcal{B}$ *od* V *odgovara dijagonalna matrica su brojevi na njenoj dijagonali. Odgovarajući svojstveni vektori su redom vektori baze* $\mathcal{B}$*. Vrijedi i obrnuto: Ako postoji baza od* V *čiji svi elementi su svojstveni vektori od* $\hat{A}$*, onda se taj operator može* ***dijagonalizirati****, tj. postoji baza za* V *s obzirom na koju je matrica od* $\hat{A}$ *dijagonalna.*

Primjer

Linearan operator $\hat{A}$ *na* $V^3(O)$ *je operator simetrije i s obzirom na bazu* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *(*$a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$*) ima matricu*

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1 + \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -1 \Rightarrow \hat{A}$ *je centralna simetrija, zrcaljenje, ili rotoinverzija.*

Primjer

Linearan operator $\hat{A}$ *na* $V^3(O)$ *je operator simetrije i s obzirom na bazu* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *(*$a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$*) ima matricu*

$$A = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1+\sqrt{3} & 3 \end{array}\right).$$

$\det A = -1 \Rightarrow \hat{A}$ *je centralna simetrija, zrcaljenje, ili rotoinverzija.* *Očito* $\hat{A} \neq \bar{\mathbf{1}}$.

Primjer

Linearan operator $\hat{A}$ *na* $V^3(O)$ *je operator simetrije i s obzirom na bazu* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *(*$a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$*) ima matricu*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1+\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -1 \Rightarrow \hat{A}$ *je centralna simetrija, zrcaljenje, ili rotoinverzija. Očito* $\hat{A} \neq \bar{\mathbf{1}}$*. Trag svakog zrcaljenja je* 1*, a rotoinverzije* $-2\cos\alpha - 1$*.*

Primjer

Linearan operator $\hat{A}$ na $V^3(O)$ je operator simetrije i s obzirom na bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$) ima matricu

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1+\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -1 \Rightarrow \hat{A}$ *je centralna simetrija, zrcaljenje, ili rotoinverzija.* *Očito* $\hat{A} \neq \bar{\mathbf{1}}$. *Trag svakog zrcaljenja je* 1, *a rotoinverzije* $-2\cos\alpha - 1$. *Dakle, ako se radi o rotoinverziji morao bi biti* $\alpha = 180^\circ$ *(a to je isto što i zrcaljenje s obzirom na ravninu okomitu na os).*

Primjer

Linearan operator $\hat{A}$ na $V^3(O)$ je operator simetrije i s obzirom na bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$) ima matricu

$$A = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1+\sqrt{3} & 3 \end{array}\right).$$

$\det A = -1 \Rightarrow \hat{A}$ *je centralna simetrija, zrcaljenje, ili rotoinverzija. Očito $\hat{A} \neq \bar{\mathbf{1}}$. Trag svakog zrcaljenja je* 1, *a rotoinverzije* $-2\cos\alpha - 1$. *Dakle, ako se radi o rotoinverziji morao bi biti* $\alpha = 180^\circ$ *(a to je isto što i zrcaljenje s obzirom na ravninu okomitu na os). Dakle, $\hat{A}$ je zrcaljenje s obzirom na neku ravninu. Koju?*

Primjer

Linearan operator $\hat{A}$ *na* $V^3(O)$ *je operator simetrije i s obzirom na bazu* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ $(a = b \neq c,\ \alpha = \beta = 90^\circ,\ \gamma = 90^\circ)$ *ima matricu*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1+\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -1 \Rightarrow \hat{A}$ *je centralna simetrija, zrcaljenje, ili rotoinverzija. Očito* $\hat{A} \neq \bar{\mathbf{1}}$. *Trag svakog zrcaljenja je* 1, *a rotoinverzije* $-2\cos\alpha - 1$. *Dakle, ako se radi o rotoinverziji morao bi biti* $\alpha = 180^\circ$ *(a to je isto što i zrcaljenje s obzirom na ravninu okomitu na os). Dakle,* $\hat{A}$ *je zrcaljenje s obzirom na neku ravninu. Koju?*

Ako znamo da je $\hat{A}$ zrcaljenje, onda je odgovarajuća ravnina simetrije ravnina kroz O čiji vektor normale je jedan svojstveni vektor koji odgovara nedegeniranoj svojstvenoj vrijednosti -1. Oprez ako baza nije ortonormirana!