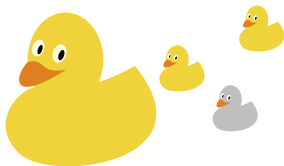


## 9. Nizovi i redovi

*Franka Miriam Brückler*

---



## Podsjetimo se: Funkcija vs. integral

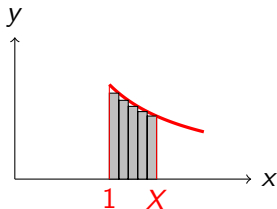
Uzmimo neku realnu funkciju jedne varijable, primjerice

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

i promatrajmo ju na, primjerice, segmetnu  $[1, 2]$ . Za svaki  $X \in [1, 2]$  je

$$\int_1^X f(x) dx = \ln X,$$

pri čemu se gornji integral definira razmatranjem integralnih suma, od kojih je jedna skupa s grafom prikazana na slici.



# Nizovi

Intuitivno, nizovi su nabranja poput

1, 2, 3, 4, 5, ...

◇, ◇◇, ◇◇◇◇, ◇◇◇◇◇◇◇◇, ...

U svakodnevnom govoru se i konačno nabranje naziva nizom, no u matematici se u pravilu gledaju beskonačni nizovi.

# Nizovi

Intuitivno, nizovi su nabranjanja poput

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$
$$\diamond, \diamond\diamond, \diamond\diamond\diamond, \diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond, \dots$$

U svakodnevnom govoru se i konačno nabranjanje naziva nizom, no u matematici se u pravilu gledaju beskonačni nizovi.

Nizovi se sastoje od članova (u pravilu: realni ili kompleksni brojevi), a za svaki član moguće je utvrditi ne samo nalazi li se u nizu, nego i na kojem mjestu (prvom, drugom, ...) u redoslijedu se nalazi.

# Nizovi

Intuitivno, nizovi su nabranja poput

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$\diamond, \diamond\diamond, \diamond\diamond\diamond, \diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond, \dots$$

U svakodnevnom govoru se i konačno nabranje naziva nizom, no u matematici se u pravilu gledaju beskonačni nizovi.

Nizovi se sastoje od članova (u pravilu: realni ili kompleksni brojevi), a za svaki član moguće je utvrditi ne samo nalazi li se u nizu, nego i na kojem mjestu (prvom, drugom, ...) u redosljedju se nalazi.

**Niz** je funkcija kojoj je domena skup  $\mathbb{N}$  ili  $\mathbb{N}_0$ . Ako je kodomena niza  $\mathbb{R}$ , govorimo o **nizu realnih brojeva (realnom nizu)**, a ako je kodomena niza  $\mathbb{C}$ , govorimo o **nizu kompleksnih brojeva (kompleksnom nizu)**.

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,
- a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza.

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,
- a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza.
- Elemente domene obično označavamo s  $n$ , a njima pridružene elemente kodomene (članove niza  $a$ ) s  $a_n$ .

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,
- a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza.
- Elemente domene obično označavamo s  $n$ , a njima pridružene elemente kodomene (članove niza  $a$ ) s  $a_n$ .
- Kad govorimo o čitavom nizu umjesto  $a : \mathbb{N} \rightarrow K$  pišemo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ili kraće  $(a_n)_n$

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,
- a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza.
- Elemente domene obično označavamo s  $n$ , a njima pridružene elemente kodomene (članove niza  $a$ ) s  $a_n$ .
- Kad govorimo o čitavom nizu umjesto  $a : \mathbb{N} \rightarrow K$  pišemo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ili kraće  $(a_n)_n$

Nizove, kao i druge funkcije, najčešće zadajemo formulom koja opisuje kako elementu domene pridružiti odgovarajući element kodomene: **formulom općeg člana niza**.

## Zadatak

*Zapišite prvih pet članova niza zadanog formulom*

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1}.$$

**Konstantan niz** je niz koji je konstantna funkcija, tj. niz opće formule oblika

$$a_n = c.$$

**Konstantan niz** je niz koji je konstantna funkcija, tj. niz opće formule oblika

$$a_n = c.$$

Nizovi se mogu zadati i **rekurzivno**.

### Primjer

**Fibonaccijev niz** je niz  $(F_n)$  definiran tako da su mu prva dva člana jednaka 1 ( $F_1 = F_2 = 1$ ), a svaki sljedeći je zbroj prethodna dva:

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2,$$

$$F_4 = F_2 + F_3 = 3,$$

$$F_5 = F_3 + F_4 = 5,$$

$$F_6 = F_4 + F_5 = 8,$$

...

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## Aritmetički i geometrijski nizovi

Niz sa svojstvom da je razlika svaka dva uzastopna člana niza ista zovemo **aritmetičkim nizom**: Niz  $(a_n)_n$  je aritmetički ako postoji konstanta  $d$  (diferencija aritmetičkog niza) takva da za sve  $n$  vrijedi

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Niz sa svojstvom da je kvocijent svaka dva uzastopna člana niza isti zovemo **geometrijskim nizom**: niz  $(a_n)_n$  je geometrijski ako postoji neki broj  $q$  (kvocijent geometrijskog niza) takav da za sve  $n = 0, 1, 2, \dots$  vrijedi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Dodatno, niz kojemu su svi osim možda početni član jednaki 0 se ubraja u geometrijske nizove (s kvocijentom 0).

## Zadatak

*Rezervoar vode curi i svaki tjedan izgubi 5 litara vode. Prije nego je počeo curiti u njemu je bilo 1500 L vode. Koliko vode je u rezervoaru nakon 20 tjedana? Kad će se volumen vode u njemu prepoloviti? Kad će rezervoar ostati potpuno prazan?*

## Zadatak

*Ako otopinu početne množinske koncentracije  $c_0$  uzastopno se peterostruko razrjeđuje vodom, nakon koliko koraka će joj koncentracija pasti ispod najmanje mjerljive koncentracije  $c_{\min}$ ?*

## Zadatak

*Rezervoar vode curi i svaki tjedan izgubi 5 litara vode. Prije nego je počeo curiti u njemu je bilo 1500 L vode. Koliko vode je u rezervoaru nakon 20 tjedana? Kad će se volumen vode u njemu prepoloviti? Kad će rezervoar ostati potpuno prazan?*

## Zadatak

*Ako otopinu početne množinske koncentracije  $c_0$  uzastopno se peterostruko razrjeđuje vodom, nakon koliko koraka će joj koncentracija pasti ispod najmanje mjerljive koncentracije  $c_{\min}$ ?*

Opći član i suma prvih  $n$  članova aritmetičkog odnosno geometrijskog dani su formulama

$$(A) : a_n = a_0 + d n, \quad (G) : a_n = a_0 q^n.$$

## Niz parcijalnih suma

Suma prvih  $n$  članova niza  $(a_n)$  općenito se naziva njegovom **parcijalnom sumom**  $S_n$ :  $S_0 = a_0$ ,  $S_1 = a_0 + a_1$ ,  $\dots$ ,  
 $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ . Za aritmetički i geometrijski niz nije teško izvesti eksplicitne formule pripadnih parcijalnih suma:

$$(A) : S_n = \frac{n}{2} (2a_0 + (n - 1) d), \quad (G) : S_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

## Niz parcijalnih suma

Suma prvih  $n$  članova niza  $(a_n)$  općenito se naziva njegovom **parcijalnom sumom**  $S_n$ :  $S_0 = a_0$ ,  $S_1 = a_0 + a_1$ ,  $\dots$ ,  
 $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ . Za aritmetički i geometrijski niz nije teško izvesti eksplicitne formule pripadnih parcijalnih suma:

$$(A) : S_n = \frac{n}{2} (2a_0 + (n - 1) d), \quad (G) : S_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ako je zadan niz  $(a_n)$ , često je korisno skupa s njime promatrati i pripadni niz parcijalnih suma niza  $(a_n)$ , koji se obično označava sa  $(S_n)$ .

### Zadatak

*Za geometrijski niz iz zadatka s razrjeđivanjem zapišite formulu općeg člana niza i općeg člana pripadnog niza parcijalnih suma.*

Red

$$\sum_n a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

je uređen par niza  $(a_n)_n$  i pripadnog niza parcijalnih suma  $(S_n)_n$ .

Primjer

*Red koji odgovara zadatku s razrjeđivanjem je red*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_0 \left(\frac{1}{5}\right)^n = c_0 + \frac{c_0}{5} + \frac{c_0}{25} + \dots := \left( \left(\frac{c_0}{5^n}\right)_n, \left(c_0 \frac{5 - 5^{1-n}}{4}\right)_n \right).$$

Red  $((a_n), (S_n))$  za koji je niz  $(a_n)$  geometrijski niz naziva se **geometrijskim redom**.

### Primjer

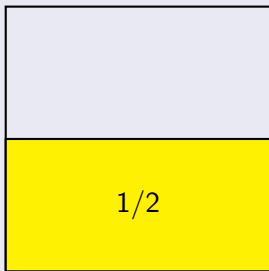
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



Red  $((a_n), (S_n))$  za koji je niz  $(a_n)$  geometrijski niz naziva se **geometrijskim redom**.

### Primjer

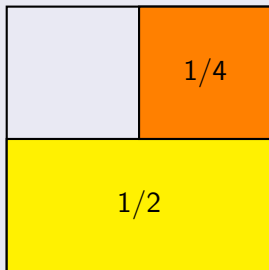
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



Red  $((a_n), (S_n))$  za koji je niz  $(a_n)$  geometrijski niz naziva se **geometrijskim redom**.

### Primjer

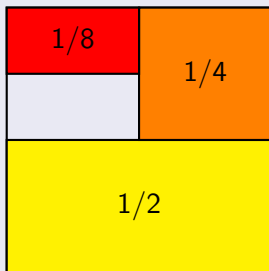
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



Red  $((a_n), (S_n))$  za koji je niz  $(a_n)$  geometrijski niz naziva se **geometrijskim redom**.

### Primjer

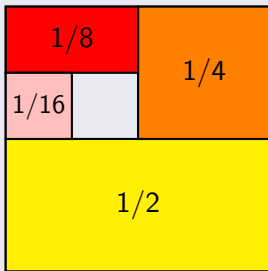
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



Red  $((a_n), (S_n))$  za koji je niz  $(a_n)$  geometrijski niz naziva se **geometrijskim redom**.

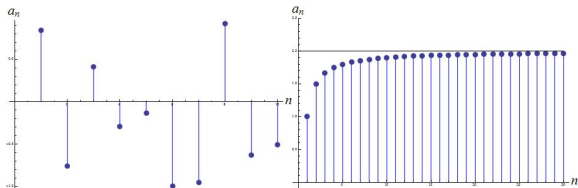
### Primjer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



# Grafički prikaz nizova

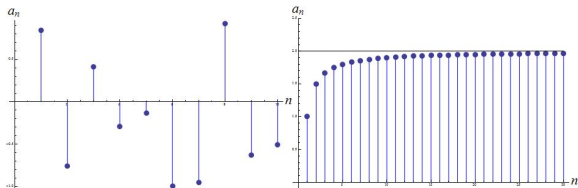
Realne nizove možemo prikazati koristeći njihove grafove u pravokutnom koordinatnom sustavu.



$$a_n = \sin n^2; \quad b_n = 2 - \frac{1}{n}$$

# Grafički prikaz nizova

Realne nizove možemo prikazati koristeći njihove grafove u pravokutnom koordinatnom sustavu.



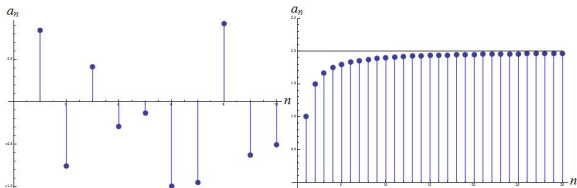
$$a_n = \sin n^2; \quad b_n = 2 - \frac{1}{n}$$

Alternativno, članove niza možemo jednostavno ucrtati na brojevni pravac, recimo za gornji niz  $(b_n)_n$ :



# Grafički prikaz nizova

Realne nizove možemo prikazati koristeći njihove grafove u pravokutnom koordinatnom sustavu.



$$a_n = \sin n^2; \quad b_n = 2 - \frac{1}{n}$$

Alternativno, članove niza možemo jednostavno ucrtati na brojevni pravac, recimo za gornji niz  $(b_n)_n$ :



Kompleksni nizovi vizualiziraju se analogno drugom od gornja dva načina, crtanjem točaka koje odgovaraju njihovim članovima  $u_n$

# Rastući i padajući realni nizovi

Niz realnih brojeva je **rastući** ako vrijedi

$$a_n \leq a_{n+1}$$

za sve  $n$ , a **padajući** ako je

$$a_n \geq a_{n+1}$$

za sve  $n$ . U slučaju da su nejednakosti iz gornje definicije zadovoljene strogo, ponekad se naglašava da je niz strogo rastući odnosno strogo padajući.

## Rastući i padajući realni nizovi

Niz realnih brojeva je **rastući** ako vrijedi

$$a_n \leq a_{n+1}$$

za sve  $n$ , a **padajući** ako je

$$a_n \geq a_{n+1}$$

za sve  $n$ . U slučaju da su nejednakosti iz gornje definicije zadovoljene strogo, ponekad se naglašava da je niz strogo rastući odnosno strogo padajući.

### Primjer

*Samo konstantan niz je istovremeno rastući i padajući.*

### Primjer

*Ako niz  $(a_n)_n$  raste, njegov suprotni niz  $(-a_n)_n$  pada (i obrnuto).  
Primjerice, niz zadan s  $a_n = \frac{1}{n}$  pada, a niz zadan s  $b_n = -\frac{1}{n}$  raste.*

# Konvergencija niza

**Limes ili granična vrijednost niza**  $(a_n)_n$  kad  $n \rightarrow +\infty$ , u oznaci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_n a_n = \lim a_n$ , je (ako postoji) broj  $L$  takav da što je veći  $n$ , to su članovi niza  $a_n$  bliži  $L$  (i pritom mogu doći proizvoljno blizu  $L$ ).

# Konvergencija niza

**Limes ili granična vrijednost niza**  $(a_n)_n$  kad  $n \rightarrow +\infty$ , u oznaci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_n a_n = \lim a_n$ , je (ako postoji) broj  $L$  takav da što je veći  $n$ , to su članovi niza  $a_n$  bliži  $L$  (i pritom mogu doći proizvoljno blizu  $L$ ). Ako limes niza postoji, kažemo da je niz **konvergentan**, a inače je **divergentan**. Neki divergentni nizovi realnih brojeva poprimaju proizvoljno velike ili male vrijednosti pa imaju smisla oznake  $\lim a_n = +\infty$  i  $\lim a_n = -\infty$ .

Za niz realnih nizova, konvergencija niza ekvivalentna je postojanju (desne) horizontalne asimptote za njegov graf.

## Zadatak

*Za sve dosad spomenute nizove u ovoj prezentaciji odredite njihove limese.*

## Primjer

*Nizovi  $2, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$  i  $1, 2, 3, \dots, 5000000, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$  imaju limes 2.*

## Zadatak

*Trokut Sierpinskog* jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.

## Zadatak

**Trokut Sierpinskog** jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji” jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji” trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno mogao provesti „u beskonačnost”, kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokuta, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

## Zadatak

**Trokut Sierpinskog** jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji” jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji” trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno mogao provesti „u beskonačnost”, kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokuta, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P,$$

## Zadatak

**Trokut Sierpinskog** jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji” jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji” trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno mogao provesti „u beskonačnost”, kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokuta, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P,$$

## Zadatak

**Trokut Sierpinskog** jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji” jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji” trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno mogao provesti „u beskonačnost”, kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokuta, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P, P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n$$

## Zadatak

**Trokut Sierpinskog** jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji” jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji” trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno mogao provesti „u beskonačnost”, kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokuta, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P, P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n$$

$$\Rightarrow P_n = P \left( \frac{3}{4} \right)^n$$

## Zadatak

**Trokut Sierpinskog** jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji” jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji” trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno mogao provesti „u beskonačnost”, kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokuta, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P, P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n$$

$$\Rightarrow P_n = P \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \lim P_n = 0.$$

# Konvergencija reda

Kao što je realnom funkcijom jedne varijable (na danom intervalu) određen pripadni integral, koji je limes odgovarajućih integralnih suma određenih njenim vrijednostima i taj limes može i ne mora postojati, tako je i svakim nizom određen pripadni red i ta suma može i ne mora imati određenu vrijednost: Red

$\sum_n a_n = ((a_n), (S_n))$  je **konvergentan** ako je odgovarajući niz parcijalnih suma  $(S_n)$  *konvergentan*. U tom slučaju  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  nazivamo **sumom reda** i pišemo

$$\sum_n a_n = \lim_n S_n.$$

## Zadatak

*U kojem slučaju je red određen konstantnim ili aritmetičkim nizom konvergentan?*

## Zadatak

## Konvergencija geometrijskog niza i reda

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni (kvocijent  $q = 1$ ) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ( $|q| < 1$ ), a inače su divergentni.

# Konvergencija geometrijskog niza i reda

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni (kvocijent  $q = 1$ ) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ( $|q| < 1$ ), a inače su divergentni. Za slučaj realnih geometrijskih nizova  $a_n = a_0 q^n$  vrijedi:

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a_0, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1, a_0 < 0, \\ \text{neodređen,} & q \leq -1 \end{cases} .$$

# Konvergencija geometrijskog niza i reda

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni (kvocijent  $q = 1$ ) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ( $|q| < 1$ ), a inače su divergentni. Za slučaj realnih geometrijskih nizova  $a_n = a_0 q^n$  vrijedi:

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a_0, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1, a_0 < 0, \\ \text{neodređen,} & q \leq -1 \end{cases} .$$

U primjeru reda nastalog rastavljanjem kvadrata zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom  $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$  pa je  $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ ,

# Konvergencija geometrijskog niza i reda

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni (kvocijent  $q = 1$ ) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ( $|q| < 1$ ), a inače su divergentni. Za slučaj realnih geometrijskih nizova  $a_n = a_0 q^n$  vrijedi:

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a_0, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1, a_0 < 0, \\ \text{neodređen,} & q \leq -1 \end{cases} .$$

U primjeru reda nastalog rastavljanjem kvadrata zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom  $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$  pa je  $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ , dakle je  $\lim_n S_n = 1$ .

# Konvergencija geometrijskog niza i reda

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni (kvocijent  $q = 1$ ) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ( $|q| < 1$ ), a inače su divergentni. Za slučaj realnih geometrijskih nizova  $a_n = a_0 q^n$  vrijedi:

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a_0, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1, a_0 < 0, \\ \text{neodređen,} & q \leq -1 \end{cases} .$$

U primjeru reda nastalog rastavljanjem kvadrata zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom  $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$  pa je  $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ , dakle je  $\lim_n S_n = 1$ .

Općenito, geometrijski red konvergira i suma mu je  $\frac{a}{1 - q}$  točno ako je  $|q| < 1$ .

## Primjer

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije), uz pretpostavku nepostojanja degeneriranih stanja, pripadna molekulska particijska funkcija statističke termodinamke je definirana kao

$$z = \sum_{j=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right),$$

gdje je  $k_B$  Boltzmannova konstanta,  $T$  termodinamička temperatura,  $h$  je Planckova konstanta, a  $\nu$  je vibracijska frekvencija. Gornji red za  $z$  možemo zapisati i kao

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right) = \sum_j a_0 q^j$$

Parcijalne sume konvergentnih redova su aproksimacije njihovih suma:

### Primjer

Zapis  $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$  zapravo znači

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Kad  $\frac{1}{3}$  pišemo kao aproksimativno  $0,33333$  zapravo smo uzeli petu parcijalnu sumu kao aproksimaciju ukupne sume reda. Pritom treba misliti na to da se radi samo o aproksimaciji poznatog broja  $\frac{1}{3}$ , koji je različit od broja  $0,33333 = 0,33333000\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{10^n}$  gdje je  $a_n = 3$  za  $n \leq 5$  i  $a_n = 0$  za  $n > 5$ .

## Svojstva konvergentnih nizova

Limes niza, ako postoji, jedinstven je. Nadalje, vrijede i svojstva limesa s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje nizova isto kao za limese funkcija u beskonačnosti.

### Primjer

$$\lim \left( \frac{1}{n} + 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) = \lim \frac{1}{n} + 3 \lim \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0 + 0 = 0.$$

## Svojstva konvergentnih nizova

Limes niza, ako postoji, jedinstven je. Nadalje, vrijede i svojstva limesa s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje nizova isto kao za limese funkcija u beskonačnosti.

### Primjer

$$\lim \left( \frac{1}{n} + 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) = \lim \frac{1}{n} + 3 \lim \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0 + 0 = 0.$$

### Teorem (Heineova karakterizacija neprekidnosti)

*Realna funkcija jedne varijable  $f$  je neprekidna u točki  $c$  ako i samo ako za svaki niz  $(a_n)_n$  koji konvergira k  $c$ , niz  $(f(a_n))_n$  konvergira k  $f(c)$ .*

### Primjer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n^2} = \sin \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \sin 0 = 0.$$

## Neki važni konvergentni i divergentni nizovi

Primijetimo da se konvergencija/divergencija realnog niza s općim članom  $a_n$  svodi na postojanje/nepostojanje desne horizontalne asimptote za funkciju  $a(x)$ .

## Neki važni konvergentni i divergentni nizovi

Primijetimo da se konvergencija/divergencija realnog niza s općim članom  $a_n$  svodi na postojanje/nepostojanje desne horizontalne asimptote za funkciju  $a(x)$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

## Neki važni konvergentni i divergentni nizovi

Primijetimo da se konvergencija/divergencija realnog niza s općim članom  $a_n$  svodi na postojanje/nepostojanje desne horizontalne asimptote za funkciju  $a(x)$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

Svojstva limesa nizova analogna su svojstvima limesa funkcija za slučajeve kad varijabla teži u  $+\infty$ .

### Primjer

$$\lim \left( \frac{1}{n} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \lim \frac{1}{n} + 3 \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 + 0 = 0.$$

## Neki važni konvergentni i divergentni redovi

Uz geometrijske redove kojima je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1, najpoznatiji konvergentni redovi su redovi

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

### Napomena

*Poznato je da vrijedi  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , tj.  $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (L. Euler, 18. st.).*

## Neki važni konvergentni i divergentni redovi

Uz geometrijske redove kojima je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1, najpoznatiji konvergentni redovi su redovi

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

### Napomena

Poznato je da vrijedi  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , tj.  $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (L. Euler, 18. st.).

Među divergentnim redovima, posebno je poznat **harmonijski red**

$$\sum_n \frac{1}{n}.$$

1/2	1/2	1/3	1/5			...
		1/4	1/6			
1/2			1/7			
			1/8			

## Veza između konvergencije niza i pripadnog reda

Postoji li veza između (ne)postojanja limesa niza  $(a_n)$  i (ne)postojanja limesa pripadnog niza  $(S_n)$ ?

## Veza između konvergencije niza i pripadnog reda

Postoji li veza između (ne)postojanja limesa niza  $(a_n)$  i (ne)postojanja limesa pripadnog niza  $(S_n)$ ?

**Teorem (Nužan uvjet konvergencije reda)**

*Ako red  $\sum_n a_n$  konvergira, onda je  $\lim_n a_n = 0$ . Drugim riječima, ako niz  $(a_n)$  ne teži u 0, odgovarajući red  $\sum_n a_n$  sigurno divergira.*

**Zadatak**

*Redovi  $\sum_n (1 - \frac{1}{n})$  i  $\sum_n \cos n$  divergiraju. Zašto?*

## Veza između konvergencije niza i pripadnog reda

Postoji li veza između (ne)postojanja limesa niza  $(a_n)$  i (ne)postojanja limesa pripadnog niza  $(S_n)$ ?

### Teorem (Nužan uvjet konvergencije reda)

*Ako red  $\sum_n a_n$  konvergira, onda je  $\lim_n a_n = 0$ . Drugim riječima, ako niz  $(a_n)$  ne teži u 0, odgovarajući red  $\sum_n a_n$  sigurno divergira.*

### Zadatak

*Redovi  $\sum_n (1 - \frac{1}{n})$  i  $\sum_n \cos n$  divergiraju. Zašto?*

Oprez: Ako u nekom redu  $\sum_n a_n$  opći član teži u nulu ( $\lim_n a_n = 0$ ) ne znači da red konvergira! (Primjer: harmonijski red).

# Kriteriji konvergencije redova

## Kriterij uspoređivanja

Ako je  $0 \leq a_n \leq b_n$  za sve  $n$  (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da  $\sum_n b_n$  konvergira, onda konvergira i  $\sum_n a_n$ . Ako je  $0 \leq a_n \leq b_n$  za sve  $n$  (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da  $\sum_n a_n$  divergira, onda divergira i  $\sum_n b_n$ .

## Primjer

Znamo da konvergira red  $\sum_n \frac{1}{3^n}$  (geometrijski red s kvocijentom  $1/3$ ). Kako je  $3^n < 3^n + n$  za sve  $n$ , slijedi da je  $\frac{1}{3^{n+n}} \leq \frac{1}{3^n}$  za sve  $n$ , pa temeljem kriterija uspoređivanja zaključujemo da i red  $\sum_n \frac{1}{3^{n+n}}$  konvergira.

## D'Alembertov kriterij

Ako  $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , onda red  $\sum_n a_n$  (apsolutno)<sup>a</sup> konvergira, a ako je  $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ , onda red divergira. U slučaju da je  $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  ovaj kriterij ne daje odluku.

---

<sup>a</sup>Red  $\sum_n a_n$  s realnim ili kompleksnim članovima apsolutno konvergira ako konvergira red  $\sum_n |a_n|$ . Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

## Primjer

Red  $\sum_n \frac{1}{n!}$  konvergira po d'Alembertovom kriteriju jer je

$$\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

## Cauchyjev kriterij

Ako  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , onda red  $\sum_n a_n$  (apsolutno) konvergira, a ako je  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , onda red divergira. U slučaju da je  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  ovaj kriterij ne daje odluku.

## Primjer

Red  $\sum_n \left( \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} \right)^n$  konvergira po Cauchyjevom kriteriju jer je

$$\lim_n \sqrt[n]{\left( \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} \right)^n} = \lim_n \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} = \frac{1}{6} < 1.$$

## Leibnizov kriterij

Red  $\sum_n (-1)^n a_n$  (gdje su svi  $a_n \geq 0$ ) konvergira ako je niz  $(a_n)$  padajući i konvergira u nulu.

## Primjer

Red  $\sum_n (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  konvergira po Leibnizovom kriteriju jer je  $a_n = \frac{1}{n} > 0$  za sve  $n$ , niz  $(\frac{1}{n})_n$  je padajući i  $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ .

## Integralni kriterij

Ako su svi  $a_n$  pozitivni i ako je  $f(x)$  definirana tako da u formuli za opći član  $a_n$  znak  $n$  zamijenimo s  $x$ , te ako je tako definirana  $f$  neprekidna za  $x \geq 1$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , onda red  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  i integral  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

## Primjer

*Integralnim kriterijem može se pokazati divergencija harmonijskog reda  $\sum_n \frac{1}{n}$ . Kako je  $a_n = \frac{1}{n}$ , znači da uzimamo  $f(x) = \frac{1}{x}$  i  $f$  ima tražena svojstva (neprekidna za  $x \geq 1$  i ima  $x$ -os kao horizontalnu asimptotu). Kako znamo da  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  divergira u  $+\infty$ , zaključujemo da je  $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ .*

*Općenito se integralnim kriterijem može pokazati da među redovima  $\sum_n \frac{1}{n^s}$  konvergiraju točno oni kod kojih je  $s > 1$ .*