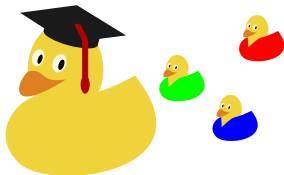


Redovi potencija

Franka Miriam Brückler



Redovi funkcija

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$1 + (x - 2) + \frac{(x - 2)^2}{2!} + \frac{(x - 2)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - 2)^n}{n!},$$

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx).$$

Redovi funkcija

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$1 + (x - 2) + \frac{(x - 2)^2}{2!} + \frac{(x - 2)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - 2)^n}{n!},$$

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx).$$

Redove čiji opći članovi osim o indeksu n ovise i o dodatnoj nezavisnoj varijabli x zovemo **redovima funkcija**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x).$$

Skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje taj red konvergira zove se **područje konvergenije** tog reda.

Primjer

Područje konvergencije reda $\sum_n (2x)^n$ je $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ jer je to geometrijski red s kvocijentom $q = 2x$, a uvjet konvergencije geometrijskog reda je $|q| < 1$.

Zadatak

Pokažite da je područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(x+3)^n}{4^n}$$

interval $\langle -7, 1 \rangle$.

Primjer

Područje konvergencije reda $\sum_n (2x)^n$ je $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ jer je to geometrijski red s kvocijentom $q = 2x$, a uvjet konvergencije geometrijskog reda je $|q| < 1$.

Zadatak

Pokažite da je područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(x+3)^n}{4^n}$$

interval $\langle -7, 1 \rangle$.

Za x iz područja konvergencije smisleno je pisati $f(x) = \sum_n a_n(x)$, tj. tom je formulom definirana realna funkcija kojoj je domena područje konvergencije reda na desnoj strani formule.

Redovi potencija

Red potencija (oko točke $c \in \mathbb{R}$) je red funkcija oblika

$$\sum_n b_n (x - c)^n.$$

Red potencija konvergira za sve $x \in \langle c - R, c + R \rangle$, gdje je R tzv. **radijus konvergencije reda potencija**, određen bilo kojom od formula

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}}, \quad R = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|.$$

U rubovima intervala $\langle c - R, c + R \rangle$ red može i ne mora konvergirati. Uočimo da radijus konvergencije reda potencija ne ovisi o c .

Redovi potencija

Red potencija (oko točke $c \in \mathbb{R}$) je red funkcija oblika

$$\sum_n b_n (x - c)^n.$$

Red potencija konvergira za sve $x \in \langle c - R, c + R \rangle$, gdje je R tzv. **radijus konvergencije reda potencija**, određen bilo kojom od formula

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}}, \quad R = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|.$$

U rubovima intervala $\langle c - R, c + R \rangle$ red može i ne mora konvergirati. Uočimo da radijus konvergencije reda potencija ne ovisi o c .

Zadatak

Koji je radijus konvergencije reda iz prethodnog primjera? Koji je

interval konvergencije reda $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n x^n}{4^n}$?

Svaka parcijalna suma svakog reda potencija je

Svaka parcijalna suma svakog reda potencija je polinom. Budući da parcijalne sume aproksimiraju sume konvergentnih redova, možemo se pitati: Može li se dana realna funkcija f na nekom intervalu oko neke točke c njene domene (po volji dobro) aproksimirati polinomima?

Primjer

Za $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ je

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

Svaka parcijalna suma svakog reda potencija je polinom. Budući da parcijalne sume aproksimiraju sume konvergentnih redova, možemo se pitati: Može li se dana realna funkcija f na nekom intervalu oko neke točke c njene domene (po volji dobro) aproksimirati polinomima?

Primjer

Za $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ je

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

Zadatak

Koje su najbolje aproksimacije polinomima stupnjeva 0 i 1 funkcije

$$f(x) = x \ln x$$

za x blizu 1?

U nastavku: I otvoren interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in I$.

Najbolja aproksimacija od f oko c polinomom stupnja 0 je

$$T_0(x) = f(c).$$

Najbolja aproksimacija od f oko c polinomom stupnja 1 je

$$T_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

U nastavku: I otvoren interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in I$.

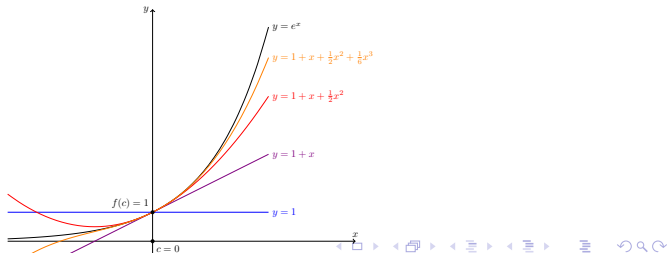
Najbolja aproksimacija od f oko c polinomom stupnja 0 je

$$T_0(x) = f(c).$$

Najbolja aproksimacija od f oko c polinomom stupnja 1 je

$$T_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Općenito, najbolja aproksimacija od f oko c polinomom stupnja n je **Taylorov polinom** stupnja n , koji se može definirati ako f posjeduje sve derivacije do uključivo n -te u točki c :



Taylorovi polinomi

Primjer

Ako $f(x) = \exp(x)$ oko $c = 0$ želimo aproksimirati polinomom 3. stupnja, $T_3(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, najbolji je onaj za kog vrijedi

$$f(0) = T_3(0) : e^0 = b_0, f'(0) = T_3'(0) : e^0 = b_1,$$

$$f''(0) = T_3''(0) : e^0 = 2b_2, f'''(0) = T_3'''(0) : e^0 = 6b_3.$$

Dakle, traženi polinom je $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

Taylorovi polinomi

Primjer

Ako $f(x) = \exp(x)$ oko $c = 0$ želimo aproksimirati polinomom 3. stupnja, $T_3(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, najbolji je onaj za kog vrijedi

$$f(0) = T_3(0) : e^0 = b_0, f'(0) = T_3'(0) : e^0 = b_1,$$

$$f''(0) = T_3''(0) : e^0 = 2b_2, f'''(0) = T_3'''(0) : e^0 = 6b_3.$$

Dakle, traženi polinom je $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

$$f(c) = T_n(c), f'(c) = T_n'(c), f''(c) = T_n''(c), \dots, f^{(n)}(c) = T_n^{(n)}(c)$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!} \text{ za } m = 0, 1, \dots, n$$

Dakle, **Taylorov polinom** stupnja n funkcije f oko točke c je polinom

$$T_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Dakle, **Taylorov polinom** stupnja n funkcije f oko točke c je polinom

$$T_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

U pravilu, ali ne i uvijek. povećanjem stupnja n Taylorovog polinoma dobivamo točniju aproksimaciju funkcije f oko c . Ako funkcija f posjeduje sve derivacije u c , onda je definiran i red potencija

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Taj red se zove **Taylorovim redom funkcije f oko c** . Njegove parcijalne sume su Taylorovi polinomi. Ako je $c = 0$ govorimo o **Maclaurinovom redu** $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Primjer

Kako je za $f(x) = \exp(x)$ i $f^{(n)}(x) = \exp(x)$ i stoga $f^{(n)}(0) = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$, slijedi da je Maclaurinov red za $\exp(x)$ dan formulom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Primjer

Kako je za $f(x) = \exp(x)$ i $f^{(n)}(x) = \exp(x)$ i stoga $f^{(n)}(0) = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$, slijedi da je Maclaurinov red za $\exp(x)$ dan formulom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Ako je $I' \subseteq I$ područje konvergencije Taylorovog reda od f oko c , na I' taj red definira funkciju $T(x)$ koja se s $f(x)$ sigurno podudara bar za $x = c$. No, Taylorov red funkcije općenito ne mora biti jednak funkciji f nigdje osim u c , tj. nije uvijek moguće staviti jednakost između $f(x)$ i pripadnog Taylorovog reda $T(x)$.

Teorem (Taylor)

Funkcija je jednaka svom Taylorovom redu (na nekom intervalu I' oko c) ako za svaki $x \in I'$ s porastom n greške $R_n(x) = T(x) - T_n(x)$ aproksimacije $f(x)$ s $T_n(x)$ teže u 0.

Teorem

Ako je na nekom intervalu oko c funkcija jednaka nekom redu potencija, onda je to njezin Taylorov red oko c .

U tom slučaju kažemo da smo f **razvili u red potencija** oko c .

Zadatak

Polinom $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ razvijte u red potencija oko $c = 5$.

Teorem (Taylor)

Funkcija je jednaka svom Taylorovom redu (na nekom intervalu I' oko c) ako za svaki $x \in I'$ s porastom n greške $R_n(x) = T(x) - T_n(x)$ aproksimacije $f(x)$ s $T_n(x)$ teže u 0.

Teorem

Ako je na nekom intervalu oko c funkcija jednaka nekom redu potencija, onda je to njezin Taylorov red oko c .

U tom slučaju kažemo da smo f **razvili u red potencija** oko c .

Zadatak

Polinom $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ razvijte u red potencija oko $c = 5$.

Taylorovi redovi polinoma su oni sami, raspisani po potencijama od $(x - c)$.

Važni Maclaurinovi razvoji

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Maclaurinovi redovi parnih funkcija sadrže samo članove s parnim eksponentima (svi neparni koeficijenti su im 0), a Maclaurinovi redovi neparnih funkcija sadrže samo članove s neparnim eksponentima (svi parni koeficijenti su im 0).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

Binomni red

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

koji konvergira za $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Eksponent α može biti bilo koji realan broj, a $\binom{\alpha}{n}$ je definiran kao

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Zadatak

Razvijte u Maclaurinove redove i navedite odgovarajuće interval konvergencije funkcije $f(x) = 10^{-x}$, $g(x) = \operatorname{sh} x$, $h(x) = \arcsin x$ i $r(x) = \frac{1}{1-2x^3}$. Koliko iznose 100. derivacije tih funkcija u 0?

Zadatak

Razvijte u Maclaurinove redove i navedite odgovarajuće interval konvergencije funkcije $f(x) = 10^{-x}$, $g(x) = \operatorname{sh} x$, $h(x) = \arcsin x$ i $r(x) = \frac{1}{1-2x^3}$. Koliko iznose 100. derivacije tih funkcija u 0?

Zadatak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e)^n}{(2n+1)!} = ?$$

Zadatak

Razvijte u Maclaurinove redove i navedite odgovarajuće interval konvergencije funkcije $f(x) = 10^{-x}$, $g(x) = \operatorname{sh} x$, $h(x) = \arcsin x$ i $r(x) = \frac{1}{1-2x^3}$. Koliko iznose 100. derivacije tih funkcija u 0?

Zadatak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e)^n}{(2n+1)!} = ?$$

Primjer

Integral

$$\int_0^x \exp(-t^2) dt$$

postoji (jer je podintegralna funkcija neprekidna), ali se ne može direktno izračunati (antiderivacija podintegralne funkcije nije elementarna funkcija). No:

$$\begin{aligned}\int_0^x \exp(-t^2) dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-t^2)^n dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

$$\int_0^x \exp(-t^2) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-t^2)^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1}.$$

Zadatak

Znajući da je vjerojatnost da se molekula plina kreće nekom brzinom opisana funkcijom gustoće vjerojatnosti

$$f_{\text{MB}}(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{Mv^2}{2RT} \right),$$

na dvije značajne znamenke (cijeli postotak) procijenite vjerojatnost da se molekula dušika pri 25^{circ}C kreće brzinom ne većom od 500 m/s.

$M = 28,02 \text{ g/mol}; R = 8,3145 \text{ J/(K mol)}, T = 298,15 \text{ K} \Rightarrow$

$$f_{\text{MB}}(v) = 3,032 \cdot 10^{-8} v^2 \exp(-5,652 \cdot 10^{-6} v^2),$$

$$P = \int_0^{500} f_{\text{MB}}(v) dv = ?$$

$$M = 28,02 \text{ g/mol}; R = 8,3145 \text{ J/(K mol)}, T = 298,15 \text{ K} \Rightarrow$$

$$f_{\text{MB}}(v) = 3,032 \cdot 10^{-8} v^2 \exp(-5,652 \cdot 10^{-6} v^2),$$

$$P = \int_0^{500} f_{\text{MB}}(v) dv = ?$$

$$f_{\text{MB}}(v) = 3,032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5,652 \cdot 10^{-6})^n}{n!} v^{2n+2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P &= 3,032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5,652 \cdot 10^{-6})^n}{n!(2n+3)} v^{2n+3} = \\ &= \frac{3,032 \cdot 10^{-8}}{3} v^3 - 3,032 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{-5,652 \cdot 10^{-6}}{5} v^5 + \\ &\quad + 3,032 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{(-5,652 \cdot 10^{-6})^2}{14} v^7 - \dots \end{aligned}$$

Računamo redom parcijalne sume za gornji red sve dok nam se ne ponove dvije značajne znamenke. Koristimo:

$$S_n = S_{n-1} + 3,032 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{(-5,652 \cdot 10^{-6})^n}{n!(2n+3)} v^{2n+3}.$$

$$n = 0: P_0 = 1,011 \cdot 10^{-8} 500^3 = 1,26375$$

$$n = 1: P_1 = P_0 - 3,427 \cdot 10^{-14} 500^5 = 0,19281$$

$$n = 2: P_2 = P_1 + 6,918 \cdot 10^{-20} 500^7 = 0,73328$$

$$n = 3: P_3 = P_2 - 1,014 \cdot 10^{-25} 500^9 = 0,53523$$

$$n = 4: P_4 = P_3 + \dots 500^{11} = 0,59246$$

$$n = 5: P_5 = P_4 - \dots 500^{13} = 0,57878$$

$$n = 6: P_6 = P_5 + \dots 500^{15} = 0,58157$$

$$n = 7: P_7 = P_6 - \dots 500^{17} = 0,58108$$

Računamo redom parcijalne sume za gornji red sve dok nam se ne ponove dvije značajne znamenke. Koristimo:

$$S_n = S_{n-1} + 3,032 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{(-5,652 \cdot 10^{-6})^n}{n!(2n+3)} v^{2n+3}.$$

$$n = 0: P_0 = 1,011 \cdot 10^{-8} 500^3 = 1,26375$$

$$n = 1: P_1 = P_0 - 3,427 \cdot 10^{-14} 500^5 = 0,19281$$

$$n = 2: P_2 = P_1 + 6,918 \cdot 10^{-20} 500^7 = 0,73328$$

$$n = 3: P_3 = P_2 - 1,014 \cdot 10^{-25} 500^9 = 0,53523$$

$$n = 4: P_4 = P_3 + \dots 500^{11} = 0,59246$$

$$n = 5: P_5 = P_4 - \dots 500^{13} = 0,57878$$

$$n = 6: P_6 = P_5 + \dots 500^{15} = 0,58157$$

$$n = 7: P_7 = P_6 - \dots 500^{17} = 0,58108$$

S obzirom na to da su se u zadnja dva koraka prve dvije, štoviše tri znamenke poklopile, zaključujemo da je tražena vjerojatnost 58,1 %.

Egzaktna vrijednost je $P = 58,0683 \dots \%$.

Greška aproksimacije Taylorovim polinomom

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

za x iz intervala I' na kojem razmatramo aproksimaciju funkcije f Taylorovim polinomom T_n .

Primjer

Greška aproksimacije $f(x) = \exp(x)$ oko nule Taylorovim polinomom $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ je

$R_3(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Ta greška za primjerice $x = 0,1$ iznosi $R_3(0,1) = 4,2514 \cdot 10^{-6}$.

Greška aproksimacije Taylorovim polinomom

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

za x iz intervala I' na kojem razmatramo aproksimaciju funkcije f Taylorovim polinomom T_n .

Primjer

Greška aproksimacije $f(x) = \exp(x)$ oko nule Taylorovim polinomom $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ je

$R_3(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Ta greška za primjerice $x = 0,1$ iznosi $R_3(0,1) = 4,2514 \cdot 10^{-6}$.

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - c|^{n+1}$$

gdje je M gornja međa za apsolutnu vrijednost od $f^{(n+1)}(t)$ za t -ove između x i c (tj. $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ za sve t između x i c).

Primjer

Greška aproksimacije $\sin x$ Maclaurinovim polinomom stupnja 3 za $x = 0,1$ je najviše $\frac{1}{24} \cdot 10^{-4} \approx 4,16667 \cdot 10^{-6}$.

Primjer

Greška aproksimacije $\sin x$ Maclaurinovim polinomom stupnja 3 za $x = 0,1$ je najviše $\frac{1}{24} \cdot 10^{-4} \approx 4,16667 \cdot 10^{-6}$.

Zadatak

Ako $\cos x$ želimo u okolini nule Taylorovim polinomom stupnja 4 tako da greška bude najviše reda 0,001, na kojem intervalu to možemo postići?

Primjer

Greška aproksimacije $\sin x$ Maclaurinovim polinomom stupnja 3 za $x = 0,1$ je najviše $\frac{1}{24} \cdot 10^{-4} \approx 4,16667 \cdot 10^{-6}$.

Zadatak

Ako $\cos x$ želimo u okolini nule Taylorovim polinomom stupnja 4 tako da greška bude najviše reda 0,001, na kojem intervalu to možemo postići?

Primjer

U teoriji relativnosti pojavljuje se formula

$$m = m(v) = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}} m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Uz pretpostavku $v \ll c$ aproksimirajte $m(v)$ koristeći Taylorov polinomom stupnja 2 i izračunajte maksimalnu grešku te aproksimacije ako v ne prelazi više od 10 % c .

Primjer

Planckov zakon za zračenje crnog tijela glasi

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)}.$$

Tu je $\rho(\lambda)$ spektralna gustoća energije zračenja valne duljine λ , h je Planckova konstanta, k Boltzmannova konstanta, c je brzina svjetlosti, a T temperatura (u Kelvinima). Prije Plancka Rayleigh i Jeans predložili su jednostavniju formulu

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

no kako bi iz te formule slijedilo da ρ jako raste kako se valne duljine približavaju nuli, i to pri svim temperaturama, slijedilo bi da sva tijela emitiraju kratkovalno i ultraljubičasto zračenje (ultraljubičasta katastrofa).

Za velike λ je

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \approx 0.$$

Stoga je aproksimacija

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

najbolja aproksimacija s dva člana (to bolja, tj. ima to manju grešku, što je x bliži nuli, tj. što je λ veća).

Za velike λ je

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \approx 0.$$

Stoga je aproksimacija

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

najbolja aproksimacija s dva člana (to bolja, tj. ima to manju grešku, što je x bliži nuli, tj. što je λ veća).

Slijedi da je za velike λ nazivnik u Planckovom zakonu približno jednak $\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}$ te Planckov zakon za velike λ poprima oblik

$$\rho(\lambda) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

što je točno Rayleigh-Jeansova formula.