

Matematika 2 za kemičare

pismeni ispit, 24. lipnja 2026.

Franka Miriam Brückler i Matea Čelar

1. (20) U jednoj predavaonici na PMF-MO 40 studenata piše pismene ispite koji su isprintani na ukupno 71 list papira. Svaki ispit iz *Matematike 1* je na jednom listu papira, ispit iz *Matematike 2* na dva lista papira, a ispit iz *Statistike* na tri lista papira. Odredite koliko studenata piše ispit iz kojeg kolegija ako je poznato da ispit iz *Matematike 1* piše tri puta više studenata nego ispit iz *Matematike 2*.

Rješenje. Treba riješiti sustav

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + 2y + 3z = 71 \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

Rješenje je $x = 21$, $y = 7$ i $z = 12$.

Napomena: rješenja bez postupka (supstitucija ili Gaussova metoda eliminacija) nisu priznavana.

2. (20) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \frac{\sqrt{y+t} \ln t}{t(y+t+2026)} - 1$$

Rješenje. Nakon supstitucije $u = y + t$ jednadžba postaje

$$u' = \frac{\sqrt{u} \ln t}{t(u+2026)}.$$

Ovu jednadžbu rješavamo separacijom varijabli. Sređivanjem izraza dobivamo

$$\frac{(u+2026) du}{\sqrt{u}} = \frac{\ln t dt}{t}.$$

Integrirajmo obje strane:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+2026) dx}{\sqrt{x}} &= \left[\begin{array}{ll} u = x + 2026 & du = dx \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} & v = 2\sqrt{x} \end{array} \right] = 2\sqrt{x}(x+2026) - 2 \int \sqrt{x} dx \\ &= 2(x+2026)\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C_1 = 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{3}x + 2026\right) + C_1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln x dx}{x} = \left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C_2 = \frac{\ln^2 x}{2} + C_2.$$

Nakon izjednačavanja, preimenovanja konstanti i vraćanja supstitucije $u = y + t$ dobivamo konačno opće rješenje (u implicitnom obliku):

$$2\sqrt{y+t} \left(\frac{1}{3}(y+t) + 2026 \right) = \frac{\ln^2 t}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Uvjet $\sqrt{u} \neq 0$ daje kandidat za singularno rješenje $y = -t$. Direktnom provjerom vidimo da je to zaista singularno rješenje polazne jednadžbe.

3. (20) Ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

$$(a) \text{ (10 bodova) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n^3} \quad (b) \text{ (10 bodova) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{2n}}{2 - \sin \frac{1}{2n}}.$$

Rješenje.

(a) Računamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^2}{n^2 + 1}} = e^{-2}.$$

Kako je $e^{-2} < 1$, red konvergira po Cauchyjevom kriteriju.

(b) Budući da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{2n} = 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{2n} = 0$, imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Dakle, nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije, pa red divergira.

4. (20) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4.$$

(a) (8 bodova) Odredite i klasificirajte sve stacionarne točke funkcije f .

(b) (6 bodova) Izračunajte integral $\iint_A f(x, y) \, dx dy$, pri čemu je A područje unutar trokuta s vrhovima $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(1, -1)$.

(c) (6 bodova) Izračunajte integral $\int_{\gamma} f \, ds$, pri čemu je γ pozitivno orijentirani rub trokuta iz (b) podzadatka.

Rješenje. Zadana je funkcija

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4.$$

(a) Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2xy = 2x(1 + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x^2.$$

Stacionarne točke zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} 2x(1 + y) = 0, \\ 2y + x^2 = 0. \end{cases}$$

Iz prve jednačbe slijedi:

$$x = 0 \quad \text{ili} \quad y = -1.$$

Ako je $x = 0$, tada iz druge jednačbe dobivamo $y = 0$. Dakle, jedna stacionarna točka je $\boxed{(0, 0)}$. Ako je $y = -1$, tada iz druge jednačbe slijedi

$x^2 = 2$, pa dobivamo još dvije stacionarne točke: $\boxed{(\sqrt{2}, -1)}$ i $\boxed{(-\sqrt{2}, -1)}$.

Hesseova matrica je

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

Za točku $(0, 0)$ imamo

$$\det Hf(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Kako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$, točka $(0, 0)$ je lokalni minimum.

Za točke $(\pm\sqrt{2}, -1)$ imamo

$$\det Hf(\pm\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = 8 < 0,$$

pa su obje točke sedlaste točke.

(b) Stranice trokuta leže na pravcima (vidi sliku)

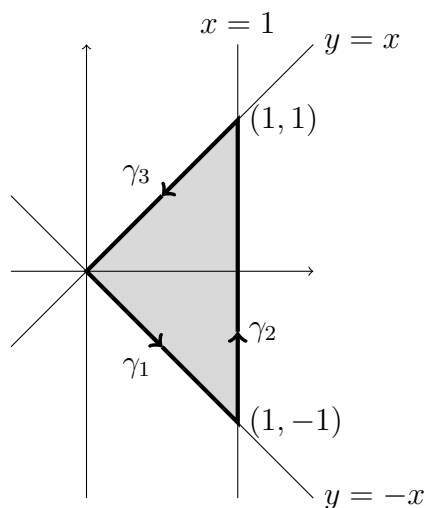
$$y = x, \quad y = -x \quad \text{i} \quad x = 1.$$

Područje integracije možemo zapisati kao

$$A \dots \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x \leq y \leq x. \end{cases}$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{-x}^x (x^2 + y^2 + x^2 y + 4) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} + 4y \right) \Big|_{y=-x}^{y=x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{8}{3} x^3 + 8x \right) \, dx = \boxed{\frac{14}{3}}. \end{aligned}$$



(c) Rub trokuta sastoji se od tri krivulje:

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, -t),$$

$$\gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (1, t)$$

i

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (1 - t, 1 - t).$$

Računamo redom:

$$I_1 := \int_{\gamma_1} f \, ds = \int_0^1 f(t, -t) \cdot \|(1, -1)\| \, dt = \int_0^1 (2t^2 - t^3 + 4) \sqrt{2} \, dt = \frac{53\sqrt{2}}{12} \approx 6.246.$$

$$I_2 := \int_{\gamma_2} f \, ds = \int_{-1}^1 f(1, t) \cdot \|(0, 1)\| \, dt = \int_{-1}^1 (t^2 + t + 5) \, dt = \frac{32}{3}.$$

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{\gamma_3} f \, ds = \int_0^1 f(1 - t, 1 - t) \cdot \|(-1, -1)\| \, dt = \left[\begin{array}{l} u = 1 - t \\ du = -dt \end{array} \right] \\ &= \int_0^1 (2t^2 + t^3 + 4) \sqrt{2} \, dt = \frac{59\sqrt{2}}{12} \approx 6.953. \end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$\int_{\gamma} f \, ds = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{128 + 112\sqrt{2}}{12} \approx 23.866.$$

5. (20) Linearan operator simetrije $\hat{A} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ s obzirom na neku bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zadanu parametrima $a = 2 \text{ cm}$, $b = \sqrt{2} \text{ cm}$, $c = \sqrt{3} \text{ cm}$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\gamma = 45^\circ$ ima matricu

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -8 & -5 & -4 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (8 bodova) Je li $\hat{A}$ centralna simetrija, zrcaljenje, rotacija ili rotoinverzija? Argumentirajte! Zatim odredite element simetrije od $\hat{A}$ (centar ako je centralna simetrija, zrcalnu ravninu ako je zrcaljenje, os ako je rotacija ili rotoinverzija). Opis (koordinate odnosno jednadžba/e) elementa simetrije se mora odnositi na bazu $\mathcal{B}$.

(b) (12 bodova)

- Ako je $\hat{A}$ centralna simetrija, odredite kamo $\hat{A}$ preslikava jedan vektor normale mrežnih ravnina smjera (111).
- Ako je $\hat{A}$ rotacija ili rotoinverzija, odredite kamo $\hat{A}$ preslikava jedan nenul-vektor (po vlastitom odabiru) okomit na os rotacije odnosno rotoinverzije.
- Ako je $\hat{A}$ zrcaljenje, odredite kamo $\hat{A}$ preslikava jedan vektor normale mrežnih ravnina istog smjera kao što je ravnina zrcaljenja.