

Matematika 2 za kemičare

pismeni ispit, 9. rujna 2026.

Franka Miriam Brückler i Matea Čelar

1. (20) Vrtlar priprema posebnu mješavinu tekućeg gnojiva za biljke miješanjem triju različitih otopina:

- 1 mL otopine A sadrži 2 mg dušika i 1 mg fosfora;
- 1 mL otopine B sadrži 1 mg dušika i 3 mg fosfora;
- 1 mL otopine C sadrži 3 mg dušika i 2 mg fosfora.

Vrtlar želi pripremiti 10 mL mješavine koja će sadržavati 16 mg dušika i λ mg fosfora ($\lambda > 0$ je nepoznati parametar). U ovisnosti o parametru λ odredite koliko koje otopine je potrebno za pripremu tražene smjese. Odredite i za koje sve vrijednosti parametra λ problem ima fizikalno smisleno rješenje.

Rješenje. Neka su x, y, z redom volumeni otopina A, B i C izraženi u mL. Iz zadanih uvjeta dobivamo sustav

$$\begin{cases} x + y + z = 10, & \text{(ukupni volumen u mL)} \\ 2x + y + 3z = 16, & \text{(masa dušika u mg)} \\ x + 3y + 2z = \lambda & \text{(masa fosfora u mg)}. \end{cases}$$

Sustav rješavamo Gaussovom metodom eliminacija:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & 3 & 2 & \lambda \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & \lambda - 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda - 18 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda}{3} - 6 \end{array} \right)$$

Iz posljednjeg retka čitamo $z = \frac{\lambda}{3} - 6$. Iz drugog retka imamo $y - z = 4$, odnosno $y = \frac{\lambda}{3} - 2$, a iz prvog retka imamo $x + 2z = 6$, odnosno $x = 18 - \frac{2\lambda}{3}$.

Prema tome, količine pojedinih otopina su

$$x = 18 - \frac{2\lambda}{3}, \quad y = \frac{\lambda}{3} - 2, \quad z = \frac{\lambda}{3} - 6.$$

Da bi problem imamo smisleno rješenje, količine otopina moraju biti nenegativne, tj. mora vrijediti

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{i} \quad z \geq 0.$$

Iz prvog uvjeta slijedi $\lambda \leq 27$, iz drugog uvjeta slijedi $\lambda \geq 6$, a iz trećeg uvjeta slijedi $\lambda \geq 18$. Kombiniranjem svih uvjeta dobivamo

$$18 \leq \lambda \leq 27,$$

pa problem ima smisleno (i jedinstveno) rješenje za sve $\lambda \in [18, 27]$.

2. (20) Neka je $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$, gdje je

$$f_1 = (1, 0, 0), \quad f_2 = (1, 1, 0), \quad f_3 = (0, 1, 1).$$

Linearni operator $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na bazu $\mathcal{B}$:

$$\hat{A}(f_1) = 0, \quad \hat{A}(f_2) = 2f_2, \quad \hat{A}(f_3) = 2f_3.$$

- (a) (7 bodova) Odredite matricu operatora $\hat{A}$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ i s obzirom na kanonsku bazu prostora $\mathbb{R}^3$.
- (b) (6 bodova) Odredite spektar operatora $\hat{A}$ i pripadne svojstvene vektore.
- (c) (7 bodova) Odredite sve vektore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ takve da vektor $\hat{A}\vec{v}$ leži na pravcu

$$p \dots \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Rješenje.

- (a) Stupci matrice operatora s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ dobivaju se zapisivanjem koordinata vektora $\hat{A}(f_1), \hat{A}(f_2), \hat{A}(f_3)$ u bazi $\mathcal{B}$.

Vrijedi

$$\begin{aligned} \hat{A}(f_1) &= 0 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3, & \hat{A}(f_2) &= 2f_2 = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3, \\ \hat{A}(f_3) &= 2f_3 = 0f_1 + 0f_2 + 2f_3. \end{aligned}$$

Stoga je matrica operatora $\hat{A}$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ jednaka

$$[\hat{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odredimo djelovanje operatora na kanonskim baznim vektorima. Imamo

$$\hat{A}(1, 0, 0) = \hat{A}(f_1) = (0, 0, 0).$$

Nadalje, vrijedi

$$\hat{A}(0, 1, 0) = \hat{A}(f_2 - f_1) = 2f_2 - 0 = (2, 2, 0)$$

i

$$\hat{A}(0, 0, 1) = \hat{A}(f_3 - f_2 + f_1) = 2f_3 - 2f_2 + 0 = (-2, 0, 2).$$

Dakle, matrični zapis u kanonskoj bazi je

$$[\hat{A}]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Budući da je matrica operatora u bazi $\mathcal{B}$ dijagonalna, odmah možemo zaključiti da su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{i} \quad \lambda_2 = 2,$$

tj. da je spektar $\sigma_A = \{0, 2\}$. Također, odmah vidimo da su svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti 0 skalarni višekratnici od f_1 , tj. $\{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$, a svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti 2 su sve linearne kombinacije od f_2 i f_3 , tj. $\{(s, s+t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

- (c) Parametarski oblik zadanog pravca je $p = \{(t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$. Uvjet da vektor $\hat{A}\vec{v}$ leži na pravcu p znači da je $\hat{A}\vec{v} = (t, 2t, t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

Dakle, tražimo sve (x, y, z) koji su rješenje sustava

$$\begin{cases} 2y - 2z = t, \\ 2y = 2t, \\ 2z = t. \end{cases}$$

za neki $t \in \mathbb{R}$.

Iz druge jednadžbe slijedi $y = t$, a iz treće $z = \frac{t}{2}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $2t - 2 \cdot \frac{t}{2} = t$ što uvijek vrijedi, pa nema dodatnih uvjeta. Dakle,

$$y = t, \quad z = \frac{t}{2},$$

dok je koordinata x proizvoljna. Zato možemo zapisati

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ t/2 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

3. Riješite početnu zadaću:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 2 \sin t \cos t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Rješenje. Najprije rješavamo pripadnu homogenu diferencijalnu jednačbu

$$y'' + 4y = 0.$$

Pripadna karakteristična jednačba je $\lambda^2 + 4 = 0$ i rješenja su $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Opće rješenje homogene jednačbe je

$$y_h(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Desnu stranu polazne jednačbe najprije ćemo zapisati pomoću formule za dvostruki kut:

$$2 \sin t \cos t = \sin 2t.$$

Budući da rješenje homogene jednačbe već sadrži članove $\cos 2t$ i $\sin 2t$, za partikularno rješenje uzimamo

$$y_p(t) = t(A \cos 2t + B \sin 2t).$$

Računamo:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= A \cos 2t + B \sin 2t + 2t(B \cos 2t - A \sin 2t), \\ y_p''(t) &= 4B \cos 2t - 4A \sin 2t - 4t(A \cos 2t + B \sin 2t). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polaznu jednačbu dobivamo

$$y_p'' + 4y_p = 4B \cos 2t - 4A \sin 2t = \sin 2t.$$

Zaključujemo da je $-4A = 1$ i $4B = 0$, odakle slijedi

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = 0.$$

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_p(t) = -\frac{1}{4}t \cos 2t.$$

Opće rješenje dobivamo kao zbroj homogenog i partikularnog rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{4}t \cos 2t.$$

Prvi početni uvjet glasi $y(0) = 1$. Uvrstimo $t = 0$ u opće rješenje:

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot \cos 0,$$

odakle dobivamo $C_1 = 1$. Sada deriviramo opće rješenje:

$$y'(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{2}t \sin 2t.$$

Uvrštavanjem $y'(0) = 1$ i $C_1 = 1$ dobivamo

$$-2 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 - \frac{1}{4} \cos 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin 0 = 1,$$

odakle slijedi $2C_2 = \frac{5}{4}$, odnosno $C_2 = \frac{5}{8}$.

Dakle, konačno rješenje je

$$y(t) = \cos 2t + \frac{5}{8} \sin 2t - \frac{1}{4}t \cos 2t.$$

4. (20) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy + z^3 - 3z.$$

(a) (10 bodova) Odredite i klasificirajte sve stacionarne točke funkcije f .

(b) (10 bodova) Izračunajte

$$\iiint_S f \, dV,$$

pri čemu je S uspravni stožac visine 2 čija baza je krug u xy -ravnini radijusa 1 sa središtem u ishodištu.

Rješenje.

(a) Najprije izračunajmo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 - 3x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 - 3.$$

Prema tome, stacionarne točke moraju zadovoljavati sustav

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \\ z^2 - 1 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2, \\ z^2 = 1. \end{cases}$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi $z = \pm 1$. Uvrštavanjem $y = x^2$ u drugu jednadžbu dobivamo

$$x = x^4 \iff x(x^3 - 1) = 0.$$

Stoga je $x = 0$ ili $x = 1$. Ako je $x = 0$, tada je $y = x^2 = 0$. Ako je $x = 1$, tada je $y = x^2 = 1$. Budući da je $z = \pm 1$, dobivamo ukupno četiri stacionarne točke:

$$(0, 0, 1), \quad (0, 0, -1), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 1, -1).$$

Hessova matrica funkcije f je

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Imamo redom:

- Točka $(0, 0, 1)$:

$$H_f(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies A_1 = 0, \quad A_2 = -9 < 0, \quad A_3 = -54 < 0.$$

Dakle, $(0, 0, 1)$ je sedlasta točka.

- Točka $(0, 0, -1)$:

$$H_f(0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \implies A_1 = 0, A_2 = -9 < 0, A_3 = 54 > 00.$$

Dakle, $(0, 0, -1)$ je također sedlasta točka.

- Točka $(1, 1, 1)$:

$$H_f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies A_1 = 6 > 0, A_2 = 27 > 0, A_3 = 162 > 0.$$

Dakle, $(1, 1, 1)$ je lokalni minimum.

- Točka $(1, 1, -1)$:

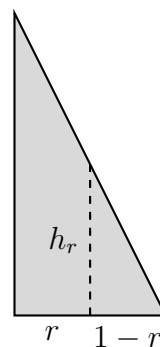
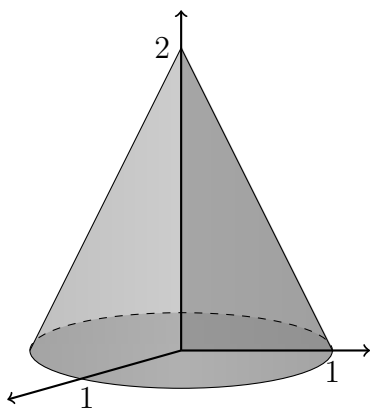
$$H_f(1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \implies A_1 = 6 > 0, A_2 = 27 > 0, A_3 = -162 < 0.$$

Dakle, $(1, 1, -1)$ je sedlasta točka.

(b) Zapišimo područje integracije u cilindričnim koordinatama:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_r,$$

pri čemu smo sa h_r označili maksimalnu visinu točke unutar stošca za dani r (vidi sliku).



Odredimo h_r iz sličnosti trokuta:

$$\frac{1-r}{h_r} = \frac{1}{2} \iff h_r = 2(1-r).$$

Dakle, granice integracije u cilindričnim koordinatama su

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2(1-r),$$

pa traženi integral prelazi u

$$\iiint_S f \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2(1-r)} \left(r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi - 3r^2 \cos \varphi \sin \varphi + z^3 - 3z \right) r \, dz d\varphi dr.$$

Izračunajmo najprije unutarnji integral, tj. integrirajmo izraz po varijabli z . Dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2(1-r) \left(r^4 \cos^3 \varphi + r^4 \sin^3 \varphi - 3r^3 \cos \varphi \sin \varphi \right) d\varphi dr \\ + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4r(1-r)^4 - 6r(1-r)^2 \right) d\varphi dr. \end{aligned}$$

Prvi integral je, nakon sređivanja, jednak

$$\begin{aligned} 2 \left(\int_0^1 r^4 (1-r) \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi \, d\varphi \right) + 2 \left(\int_0^1 r^4 (1-r) \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi \right) \\ - 6 \left(\int_0^1 r^3 (1-r) \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) \end{aligned}$$

Kako su svi integrali po varijabli φ jednaki 0, čitav ovaj izraz je jednak 0. Preostaje drugi integral, koji je nakon sređivanja jednak

$$\left(\int_0^1 \left(4r(1-r)^4 - 6r(1-r)^2 \right) dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = 4\pi \int_0^1 r(1-r)^2 (2(1-r)^2 - 3) \, dr.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r(1-r)^2 (2(1-r)^2 - 3) \, dr &= \left[\begin{array}{cc} u = 1-r & 0 \rightarrow 1 \\ du = -dr & 1 \rightarrow 0 \end{array} \right] = \int_0^1 u^2 (1-u) (2u^2 - 3) \, du \\ &= \int_0^1 (-2u^5 + 2u^4 + 3u^3 - 3u^2) \, du \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{11}{60}. \end{aligned}$$

Dakle, traženi integral je

$$-\frac{11}{60} \cdot 4\pi = -\frac{11\pi}{15}.$$

5. (20) Za novi model satelita projektantica Kasiopeja treba osmisлити polukuglasti senzor promjera točno 8 cm i na njegovoj površini označiti točku (ili točke) na kojima će pri ulasku u atmosferu temperatura biti maksimalna. Pritom su joj kolege eksperimentalci rekli da su utvrdili da se za polukuglaste senzore ovisnost temperature o poziciji točke može dobro aproksimirati funkcijom $\Theta(x, y, z) = (300 + 20(x^2 + y^2) - 10z^2)^\circ\text{C}$, uz pretpostavku da je središte polukugle ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava i da joj baza leži u (x, y) -ravnini. Pomozite Kasiopeji da odredi traženu točku (tražene točke). Koliko iznosi odgovarajuća maksimalna temperatura?