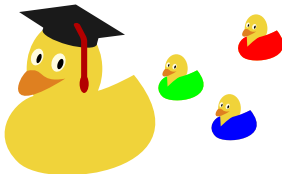


1. predavanje: Linearne enačbe i njihovi sustavi

Franka Miriam Brückler



Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$.
Čine li oni bazu prostora V^3 ?

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$.
Čine li oni bazu prostora V^3 ? Koje su koordinate vektora
 $\vec{s} = [2, -6, 4]$ u bazi $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$.
Čine li oni bazu prostora V^3 ? Koje su koordinate vektora
 $\vec{s} = [2, -6, 4]$ u bazi $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$.
Čine li oni bazu prostora V^3 ? Koje su koordinate vektora $\vec{s} = [2, -6, 4]$ u bazi $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

$$2x + y = 2, \quad -x + 2z = -6, \quad 2y - 4z = 4$$

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$.
Čine li oni bazu prostora V^3 ? Koje su koordinate vektora $\vec{s} = [2, -6, 4]$ u bazi $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

$$2x + y = 2, \quad -x + 2z = -6, \quad 2y - 4z = 4$$

Vektor $\vec{s}$ u bazi B' ima koordinate $[2, -2, -2]$.

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$.
Čine li oni bazu prostora V^3 ? Koje su koordinate vektora $\vec{s} = [2, -6, 4]$ u bazi $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

$$2x + y = 2, \quad -x + 2z = -6, \quad 2y - 4z = 4$$

Vektor $\vec{s}$ u bazi B' ima koordinate $[2, -2, -2]$.

Zadatak

Koja je razlika između $f(x) = 2x - 5$ i $2x - 5 = 0$?

Zadatak

Zadani su vektori $\vec{u} = [2, -1, 0]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ i $\vec{w} = [0, 2, -4]$.
Čine li oni bazu prostora V^3 ? Koje su koordinate vektora $\vec{s} = [2, -6, 4]$ u bazi $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

$$2x + y = 2, \quad -x + 2z = -6, \quad 2y - 4z = 4$$

Vektor $\vec{s}$ u bazi B' ima koordinate $[2, -2, -2]$.

Zadatak

Koja je razlika između $f(x) = 2x - 5$ i $2x - 5 = 0$?

Zadatak

Navedite tri rješenja jednadžbe $2x - 5y - z = 10$.

Definirajte **linearne jednadžbe** s jednom, dvije i tri nepoznanice.

Definirajte **linearne jednadžbe** s jednom, dvije i tri nepoznanice.
Definirajte njihova rješenja!

Definirajte **linearne jednadžbe** s jednom, dvije i tri nepoznanice.
Definirajte njihova rješenja! Kako ih geometrijski interpretiramo?

Definirajte **linearne jednadžbe** s jednom, dvije i tri nepoznanice.
Definirajte njihova rješenja! Kako ih geometrijski interpretiramo?
Koliko rješenja može imati jedna linearna jednadžba s jednom,
dvije odnosno tri nepoznanice?

Definirajte **linearne jednadžbe** s jednom, dvije i tri nepoznanice.
Definirajte njihova rješenja! Kako ih geometrijski interpretiramo?
Koliko rješenja može imati jedna linearna jednadžba s jednom,
dvije odnosno tri nepoznanice? Što je slobodni član linearne
jednadžbe?

Definirajte **linearne jednađžbe** s jednom, dvije i tri nepoznanice. Definirajte njihova rješenja! Kako ih geometrijski interpretiramo? Koliko rješenja može imati jedna linearna jednađžba s jednom, dvije odnosno tri nepoznanice? Što je slobodni član linearne jednađžbe? Kada kaŹemo da je linearna jednađžba homogena?

Definicija

Linearna jednađžba s n nepoznanica $x_1, x_2, \dots, x_n$ je jednađžba koja se moŹe svesti na oblik

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_n$ i b zadani brojevi (koeficijenti i slobodni član jednađžbe). Rješenje takve jednađžbe je svaka uređena n -torka brojeva $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ čije uvrštavanje redom na mjesta nepoznanica daje istinitu numeričku jednakost.

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2,$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, x = 5y,$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, \quad x = 5y,$$

$$x y = 10,$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, x = 5y,$$

$$xy = 10, w + x + y + z = 5z,$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, x = 5y,$$

$$xy = 10, w + x + y + z = 5z,$$

$$\pi xy = y,$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, x = 5y,$$

$$x y = 10, w + x + y + z = 5z,$$

$$\pi x y = y, \ln(x y z) = 1,$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, x = 5y,$$

$$xy = 10, w + x + y + z = 5z,$$

$$\pi xy = y, \ln(xyz) = 1,$$

$$\exp(x + y + z) = 1,$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednažbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, x = 5y,$$

$$x y = 10, w + x + y + z = 5z,$$

$$\pi x y = y, \ln(x y z) = 1,$$

$$\exp(x + y + z) = 1, x^2 - 5x + 7 = 20x^2 - x(19x + 2).$$

Zadatak

Koje od sljedećih jednačbi su linearne? Za one koje jesu, koje od njih su homogene? Za one koje nisu, mogu li se nekom supstitucijom svesti na linearne?

$$\frac{x}{y} = 2, x = 5y,$$

$$x y = 10, w + x + y + z = 5z,$$

$$\pi x y = y, \ln(x y z) = 1,$$

$$\exp(x + y + z) = 1, x^2 - 5x + 7 = 20x^2 - x(19x + 2).$$

Zašto gornji popis jednačbi nije sustav od osam jednačbi s četiri nepoznanice?

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese NaCl i KCl te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese NaCl i KCl te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi. Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese NaCl i KCl te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi. Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

$$M_{\text{NaCl}} = 58,45 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{KCl}} = 74,56 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{AgCl}} = 143,34 \text{ g mol}^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g.}$$

$$x = 0,2474 \text{ g}, y = 0,3716 \text{ g}$$

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese NaCl i KCl te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi. Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

$$M_{\text{NaCl}} = 58,45 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{KCl}} = 74,56 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{AgCl}} = 143,34 \text{ g mol}^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g.}$$

$$x = 0,2474 \text{ g}, y = 0,3716 \text{ g}$$

Definirajte pojam sustava jednačbi i njegovog rješenja.

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese NaCl i KCl te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi. Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

$$M_{\text{NaCl}} = 58,45 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{KCl}} = 74,56 \text{ g mol}^{-1}, M_{\text{AgCl}} = 143,34 \text{ g mol}^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g.}$$

$$x = 0,2474 \text{ g}, y = 0,3716 \text{ g}$$

Definirajte pojam sustava jednačbi i njegovog rješenja. Kada kažemo da je sustav jednačbi linearan, tj. da se radi o sustavu linearnih jednačbi?

Definicija

*Sustav linearnih jednadžbi je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Rješenje sustava je svaka uređena n -torka brojeva koja zadovoljava sve jednadžbe sustava. Ako sustav ima m jednadžbi s n nepoznanica, zovemo ga $m \times n$ -sustavom. Sustavi kojima su svi slobodni članovi jednaki nuli zovu se **homogeni sustavi**, a ostali se zovu **nehomogeni sustavi**.*

Zadatak

Postavite opći oblik sustava za promjenu koordinata vektora iz V^3 . Koji problem bi rješavao zadatak: U ovisnosti o λ , μ i η riješi sustav:

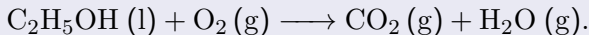
$$2x + y - z = \lambda,$$

$$-x - 3y + 2z = \mu,$$

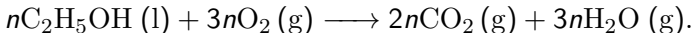
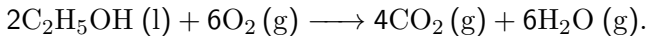
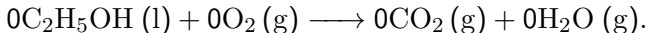
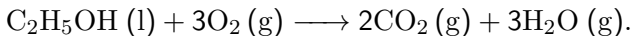
$$3x + 2y - 4z = \eta.$$

Primjer

Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:



Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!

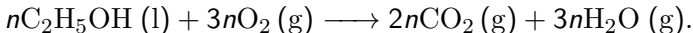
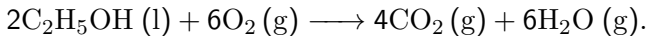
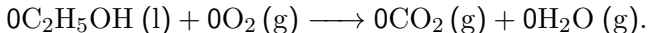
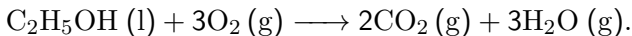


Primjer

Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:



Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!



$$\text{C : } 2x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + x_{\text{CO}_2} = 0$$

$$\text{H : } 6x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + 2x_{\text{H}_2\text{O}} = 0 \quad .$$

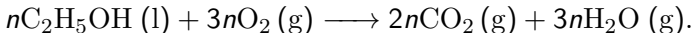
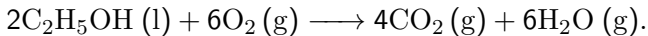
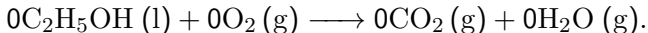
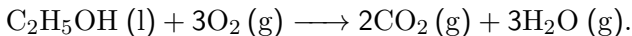
$$\text{O : } x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + 2x_{\text{O}_2} + 2x_{\text{CO}_2} + x_{\text{H}_2\text{O}} = 0$$

Primjer

Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:



Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!



$$\text{C : } 2x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + x_{\text{CO}_2} = 0$$

$$\text{H : } 6x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + 2x_{\text{H}_2\text{O}} = 0 \quad .$$

$$\text{O : } x_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} + 2x_{\text{O}_2} + 2x_{\text{CO}_2} + x_{\text{H}_2\text{O}} = 0$$

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednačba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednačba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav?

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednačba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa $m \times 2$ za $m > 2$?

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednačba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa $m \times 2$ za $m > 2$? A 2×3 -sustav?

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednačba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

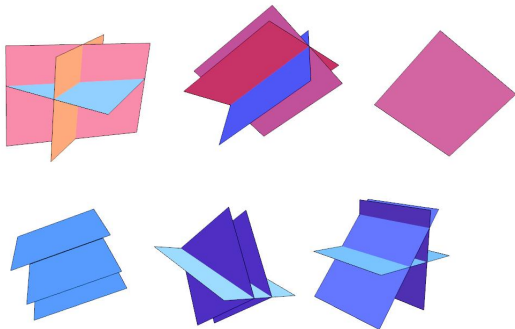
Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa $m \times 2$ za $m > 2$? A 2×3 -sustav? A 3×3 -sustav?

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednačba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

Kako geometrijski interpretiramo 2×2 -sustav i njegova rješenja?
Koliko rješenja može imati 2×2 -sustav? A što je sa sustavima tipa $m \times 2$ za $m > 2$? A 2×3 -sustav? A 3×3 -sustav?



Teorem (Osnovni teorem o rješenjima sustava linearnih jednažbi)

Svaki sustav linearnih jednažbi ima ili jedinstveno rješenje ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja.

Teorem (Osnovni teorem o rješenjima sustava linearnih jednačbi)

Svaki sustav linearnih jednačbi ima ili jedinstveno rješenje ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja.

Zadatak

Sljedeći sustav dviju jednačbi s dvije nepoznanice nije linearan:

$$x + y = 2, \quad xy = -3$$

Riješite ga!