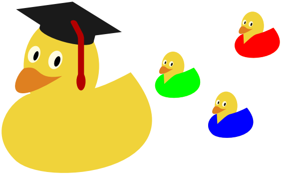
10. predavanje: Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori.

Franka Miriam Brückler



Primjer

Stacionarna Schrödingerova jednadžba:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Primjer

Stacionarna Schrödingerova jednadžba:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Zadatak

Neka je $\hat{m}$ zrcaljenje prostora $V^3(O)$ s obzirom na neku ravninu kroz ishodište. Postoje li vektori kojima se tim zrcaljenjem ne promijeni smjer?

Primjer

Stacionarna Schrödingerova jednadžba:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Zadatak

Neka je $\hat{m}$ *zrcaljenje prostora* $V^3(O)$ *s obzirom na neku ravninu kroz ishodište. Postoje li vektori kojima se tim zrcaljenjem ne promijeni smjer?*

Zadatak

Odaberite proizvoljnu matricu $A \in M_3$ *i skalar* λ*. Postoji li* $X \in M_{3,1}$ *takav da je* $AX = \lambda X$*?*

Primjer

Stacionarna Schrödingerova jednadžba:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Zadatak

Neka je $\hat{m}$ *zrcaljenje prostora* $V^3(O)$ *s obzirom na neku ravninu kroz ishodište. Postoje li vektori kojima se tim zrcaljenjem ne promijeni smjer?*

Zadatak

Odaberite proizvoljnu matricu $A \in M_3$ *i skalar* λ. *Postoji li* $X \in M_{3,1}$ *takav da je* $AX = \lambda X$?

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Ako je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator i λ skalar te ako postoji $v \neq \mathbf{0}$ takav da je $\hat{A}v = \lambda v$, kažemo da je λ svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$. Vektori v takvi da je $\hat{A}v = \lambda v$ zovu se svojstveni vektori operatora $\hat{A}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ. Skup $\sigma(\hat{A})$ svih svojstvenih vrijednosti operatora $\hat{A}$ zove se spektar operatora $\hat{A}$.

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti i vektora domena operatora mora biti jednaka kodomeni?

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Ako je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator i λ skalar te ako postoji $v \neq \mathbf{0}$ takav da je $\hat{A}v = \lambda v$, kažemo da je λ svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$. Vektori v takvi da je $\hat{A}v = \lambda v$ zovu se svojstveni vektori operatora $\hat{A}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ. Skup $\sigma(\hat{A})$ svih svojstvenih vrijednosti operatora $\hat{A}$ zove se spektar operatora $\hat{A}$.

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti i vektora domena operatora mora biti jednaka kodomeni?

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti tražimo $v \neq \mathbf{0}$?

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Ako je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator i λ skalar te ako postoji $v \neq \mathbf{0}$ takav da je $\hat{A}v = \lambda v$, kažemo da je λ svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$. Vektori v takvi da je $\hat{A}v = \lambda v$ zovu se svojstveni vektori operatora $\hat{A}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ. Skup $\sigma(\hat{A})$ svih svojstvenih vrijednosti operatora $\hat{A}$ zove se spektar operatora $\hat{A}$.

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti i vektora domena operatora mora biti jednaka kodomeni?

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti tražimo $v \neq \mathbf{0}$?

Ako je $\hat{A}$ invertibilan, koji skalar mu sigurno nije svojstvena vrijednost i zašto?

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Ako je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator i λ skalar te ako postoji $v \neq \mathbf{0}$ takav da je $\hat{A}v = \lambda v$, kažemo da je λ svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$. Vektori v takvi da je $\hat{A}v = \lambda v$ zovu se svojstveni vektori operatora $\hat{A}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ. Skup $\sigma(\hat{A})$ svih svojstvenih vrijednosti operatora $\hat{A}$ zove se spektar operatora $\hat{A}$.

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti i vektora domena operatora mora biti jednaka kodomeni?

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti tražimo $v \neq \mathbf{0}$?

Ako je $\hat{A}$ invertibilan, koji skalar mu sigurno nije svojstvena vrijednost i zašto? $\hat{A}$ je invertibilan ako i samo ako mu spektar ne sadrži 0.

Neka je $V_\lambda(\hat{A}) = \{v \in V : \hat{A}v = \lambda v\}$. Dokažite da je $V_\lambda(\hat{A}) \leq V$!

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Ako je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator i λ skalar te ako postoji $v \neq \mathbf{0}$ takav da je $\hat{A}v = \lambda v$, kažemo da je λ svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$. Vektori v takvi da je $\hat{A}v = \lambda v$ zovu se svojstveni vektori operatora $\hat{A}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ. Skup $\sigma(\hat{A})$ svih svojstvenih vrijednosti operatora $\hat{A}$ zove se spektar operatora $\hat{A}$.

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti i vektora domena operatora mora biti jednaka kodomeni?

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti tražimo $v \neq \mathbf{0}$?

Ako je $\hat{A}$ invertibilan, koji skalar mu sigurno nije svojstvena vrijednost i zašto? $\hat{A}$ je invertibilan ako i samo ako mu spektar ne sadrži 0.

Neka je $V_\lambda(\hat{A}) = \{v \in V : \hat{A}v = \lambda v\}$. Dokažite da je $V_\lambda(\hat{A}) \leq V$!

Potprostor $V_\lambda(\hat{A})$ zove se svojstveni potprostor (operatora $\hat{A}$, pridružen svojstvenoj vrijednosti λ). Ako je on dimenzije veće od 1, svojstvena vrijednost λ je

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Ako je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator i λ skalar te ako postoji $v \neq \mathbf{0}$ takav da je $\hat{A}v = \lambda v$, kažemo da je λ svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$. Vektori v takvi da je $\hat{A}v = \lambda v$ zovu se svojstveni vektori operatora $\hat{A}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ. Skup $\sigma(\hat{A})$ svih svojstvenih vrijednosti operatora $\hat{A}$ zove se spektar operatora $\hat{A}$.

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti i vektora domena operatora mora biti jednaka kodomeni?

Zašto u definiciji svojstvenih vrijednosti tražimo $v \neq \mathbf{0}$?

Ako je $\hat{A}$ invertibilan, koji skalar mu sigurno nije svojstvena vrijednost i zašto? $\hat{A}$ je invertibilan ako i samo ako mu spektar ne sadrži 0.

Neka je $V_\lambda(\hat{A}) = \{v \in V : \hat{A}v = \lambda v\}$. Dokažite da je $V_\lambda(\hat{A}) \leq V$!

Potprostor $V_\lambda(\hat{A})$ zove se svojstveni potprostor (operatora $\hat{A}$, pridružen svojstvenoj vrijednosti λ). Ako je on dimenzije veće od 1, svojstvena vrijednost λ je degenerirana.

Primjer

Ako je $\hat{H}$ Hamiltonijan nekog sustava i E energetski nivo opisan glavnim kvantnim brojem $n > 1$ i azimutnim kvantnim brojem $0 < l < n$, odgovarajuće stanje sustava je degenerirano (postoji više neproporcionalnih valnih funkcija ψ takvih da je $\hat{H}\psi = E\,\psi$).

Primjer

Ako je $\hat{H}$ Hamiltonijan nekog sustava i E energetski nivo opisan glavnim kvantnim brojem $n > 1$ i azimutnim kvantnim brojem $0 < l < n$, odgovarajuće stanje sustava je degenerirano (postoji više neproporcionalnih valnih funkcija ψ takvih da je $\hat{H}\psi = E\,\psi$).

Zadatak

Odredite spektar i svojstvene potprostore za sve osnovne operatore simetrija na $V^2(O)$ i $V^3(O)$ te za operatore skaliranja na proizvoljnom prostoru V.

Primjer

Ako je $\hat{H}$ Hamiltonijan nekog sustava i E energetski nivo opisan glavnim kvantnim brojem $n > 1$ i azimutnim kvantnim brojem $0 < l < n$, odgovarajuće stanje sustava je degenerirano (postoji više neproporcionalnih valnih funkcija ψ takvih da je $\hat{H}\psi = E\,\psi$).

Zadatak

Odredite spektar i svojstvene potprostore za sve osnovne operatore simetrija na $V^2(O)$ i $V^3(O)$ te za operatore skaliranja na proizvoljnom prostoru V.

Zadatak

Koje su moguće svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora?

Zadatak

Mogu li svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima biti linearno zavisni?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Što su to invarijante linearnog operatora? Koje dosad znamo?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Što su to invarijante linearnog operatora? Koje dosad znamo?
Neka je u nastavku $\hat{A} : V \to V$ linearan, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, i $A \in M_n$ jedna matrica od $\hat{A}$. Objasnite što su to karakteristični polinom i karakteristična jednadžba linearnog operatora $\hat{A}$ i zašto i kako iz njih možemo odrediti svojstvene vrijednosti i vektore.

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Što su to invarijante linearnog operatora? Koje dosad znamo? Neka je u nastavku $\hat{A} : V \to V$ linearan, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, i $A \in M_n$ jedna matrica od $\hat{A}$. Objasnite što su to karakteristični polinom i karakteristična jednadžba linearnog operatora $\hat{A}$ i zašto i kako iz njih možemo odrediti svojstvene vrijednosti i vektore. Koliko najviše različitih svojstvenih vrijednosti i zašto može imati $\hat{A}$?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Što su to invarijante linearnog operatora? Koje dosad znamo? Neka je u nastavku $\hat{A} : V \to V$ linearan, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, i $A \in M_n$ jedna matrica od $\hat{A}$. Objasnite što su to karakteristični polinom i karakteristična jednadžba linearnog operatora $\hat{A}$ i zašto i kako iz njih možemo odrediti svojstvene vrijednosti i vektore. Koliko najviše različitih svojstvenih vrijednosti i zašto može imati $\hat{A}$?

Zadatak

Odredite spektar i svojstvene potprostore operatora zadanog matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Što su to invarijante linearnog operatora? Koje dosad znamo? Neka je u nastavku $\hat{A} : V \to V$ linearan, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, i $A \in M_n$ jedna matrica od $\hat{A}$. Objasnite što su to karakteristični polinom i karakteristična jednadžba linearnog operatora $\hat{A}$ i zašto i kako iz njih možemo odrediti svojstvene vrijednosti i vektore. Koliko najviše različitih svojstvenih vrijednosti i zašto može imati $\hat{A}$?

Zadatak

Odredite spektar i svojstvene potprostore operatora zadanog matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zadatak

Ako je matrica A dijagonalna, koji su vektori svojstveni vektori odgovarajućeg operatora? A svojstvene vrijednosti?

Linearan operator $\hat{A} : V \to V$ može se dijagonalizirati ako s obzirom na neku bazu $\mathcal{B}$ ima dijagonalnu matricu. To je moguće ako i samo ako

[1] Kod hermitske matrice brojevi na dijagonali su realni, dakle taj operator ima samo realne svojstvene vrijednosti.

Linearan operator $\hat{A} : V \to V$ može se dijagonalizirati ako s obzirom na neku bazu $\mathcal{B}$ ima dijagonalnu matricu. To je moguće ako i samo ako $\hat{A}$ posjeduje n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, tj. ako postoji baza $\mathcal{B}$ koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora $\hat{A}$.

[1] Kod hermitske matrice brojevi na dijagonali su realni, dakle taj operator ima samo realne svojstvene vrijednosti.

Linearan operator $\hat{A} : V \to V$ može se dijagonalizirati ako s obzirom na neku bazu $\mathcal{B}$ ima dijagonalnu matricu. To je moguće ako i samo ako $\hat{A}$ posjeduje n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, tj. ako postoji baza $\mathcal{B}$ koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora $\hat{A}$. Općenito to nije jednostavno utvrditi, ali:

- Ako $\hat{A}$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti, to je sigurno moguće.
- Ako je neka matrica linearnog operatora na realnom/kompleksnom prostoru simetrična/hermitska,[1] sve su simetrične i taj se operator može dijagonalizirati.

Zadatak

Ako je to moguće, dijagonalizirajte matricu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 9 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

[1] Kod hermitske matrice brojevi na dijagonali su realni, dakle taj operator ima samo realne svojstvene vrijednosti.