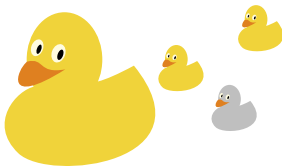


12. predavanje: Obične diferencialne enačbe prvga reda

Franka Miriam Brückler



Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to?

Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to? $y' = F(t, y)$
- Kako još možemo označiti y' ?

Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to? $y' = F(t, y)$
- Kako još možemo označiti y' ? $y' = \frac{dy}{dt} (= \dot{y})$
- Kako izgleda početni uvjet za ODJ 1. reda?

Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to? $y' = F(t, y)$
- Kako još možemo označiti y' ? $y' = \frac{dy}{dt} (= \dot{y})$
- Kako izgleda početni uvjet za ODJ 1. reda? $y(t_0) = y - 0$

Ako se izraz $F(t, y)$ može faktorizirati na jedan izraz koji ovisi samo o t i drugi koji ovisi samo o y , govorimo o

Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to? $y' = F(t, y)$
- Kako još možemo označiti y' ? $y' = \frac{dy}{dt} (= \dot{y})$
- Kako izgleda početni uvjet za ODJ 1. reda? $y(t_0) = y_0$

Ako se izraz $F(t, y)$ može faktorizirati na jedan izraz koji ovisi samo o t i drugi koji ovisi samo o y , govorimo o **diferencijalnoj jednačbi sa separiranim varijablama**. Koje od sljedećih ODJ su sa separiranim varijablama?

$$y' = x \quad y' = y^2 \quad y' = x + y \quad xy' - y = y^2 \quad 2xyy' + x = y^2$$

Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to? $y' = F(t, y)$
- Kako još možemo označiti y' ? $y' = \frac{dy}{dt} (= \dot{y})$
- Kako izgleda početni uvjet za ODJ 1. reda? $y(t_0) = y_0$

Ako se izraz $F(t, y)$ može faktorizirati na jedan izraz koji ovisi samo o t i drugi koji ovisi samo o y , govorimo o **diferencijalnoj jednačbi sa separiranim varijablama**. Koje od sljedećih ODJ su sa separiranim varijablama?

$$y' = x \quad y' = y^2 \quad y' = x + y \quad xy' - y = y^2 \quad 2xyy' + x = y^2$$

Zadatak

$$xy \, dy + (x^2 - 1) \, dx = 0, \quad y(1) = 2.$$

Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to? $y' = F(t, y)$
- Kako još možemo označiti y' ? $y' = \frac{dy}{dt} (= \dot{y})$
- Kako izgleda početni uvjet za ODJ 1. reda? $y(t_0) = y_0$

Ako se izraz $F(t, y)$ može faktorizirati na jedan izraz koji ovisi samo o t i drugi koji ovisi samo o y , govorimo o **diferencijalnoj jednačbi sa separiranim varijablama**. Koje od sljedećih ODJ su sa separiranim varijablama?

$$y' = x \quad y' = y^2 \quad y' = x + y \quad xy' - y = y^2 \quad 2xyy' + x = y^2$$

Zadatak

$$xy \, dy + (x^2 - 1) \, dx = 0, \quad y(1) = 2.$$

Ako se pak $F(t, y)$ može svesti na oblik $f(u)$, gdje je $u = y/t$, govorimo o

Diferencijalne jednačbe 1. reda

- Što su to? $y' = F(t, y)$
- Kako još možemo označiti y' ? $y' = \frac{dy}{dt} (= \dot{y})$
- Kako izgleda početni uvjet za ODJ 1. reda? $y(t_0) = y_0$

Ako se izraz $F(t, y)$ može faktorizirati na jedan izraz koji ovisi samo o t i drugi koji ovisi samo o y , govorimo o **diferencijalnoj jednačbi sa separiranim varijablama**. Koje od sljedećih ODJ su sa separiranim varijablama?

$$y' = x \quad y' = y^2 \quad y' = x + y \quad xy' - y = y^2 \quad 2xyy' + x = y^2$$

Zadatak

$$xy \, dy + (x^2 - 1) \, dx = 0, \quad y(1) = 2.$$

Ako se pak $F(t, y)$ može svesti na oblik $f(u)$, gdje je $u = y/t$, govorimo o **homogenoj diferencijalnoj jednačbi**.

Zadatak

$$(y - t)t\dot{y} = y^2$$

Zadatak

$$(y - t)t\dot{y} = y^2$$

Što su to **eksponencijalni procesi**, a što su **logistički procesi**?

Zadatak

$$(y - t)t\dot{y} = y^2$$

Što su to **eksponencijalni procesi**, a što su **logistički procesi**?
Zapišite odgovarajuće ODJ!

Zadatak

$$(y - t)t\dot{y} = y^2$$

Što su to **eksponencijalni procesi**, a što su **logistički procesi**?
Zapišite odgovarajuće ODJ!

$$\dot{y} = r y \quad \dot{y} = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

Zadatak

Patak i patka odvedeni su na patko-pusti otočić na kom su uvjeti pogodni za život najviše 25 pataka. Nakon pet godina, na otoku živi osam pataka. Kada će na otoku živiti 16 pataka? Kakvo bi bilo rješenje ako nema ograničenja na broj pataka na otočiću?

Zadatak

$$(y - t)t\dot{y} = y^2$$

Što su to **eksponencijalni procesi**, a što su **logistički procesi**?
Zapišite odgovarajuće ODJ!

$$\dot{y} = r y \quad \dot{y} = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

Zadatak

Patak i patka odvedeni su na patko-pusti otočić na kom su uvjeti pogodni za život najviše 25 pataka. Nakon pet godina, na otoku živi osam pataka. Kada će na otoku živiti 16 pataka? Kakvo bi bilo rješenje ako nema ograničenja na broj pataka na otočiću?

Kemijska kinetika Za bilo koji sudionik reakcije J vrijedi

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu_J} \cdot \frac{d[J]}{dt}, \quad x(0) = 0, \quad [J] = [J]_0 + \nu_J \cdot x.$$

Zakon brzine reakcije?

$$v = k \cdot [R_1]^{m_1} \cdot [R_2]^{m_2} \cdot \dots$$

Zbroj $m_1 + m_2 + \dots$ zove se **red reakcije**. Kojeg je reda odgovarajuća diferencijalna jednažba?

Zakon brzine reakcije?

$$v = k \cdot [R_1]^{m_1} \cdot [R_2]^{m_2} \cdot \dots$$

Zbroj $m_1 + m_2 + \dots$ zove se **red reakcije**. Kojeg je reda odgovarajuća diferencijalna jednažba? Uvijek je 1. reda, neovisno o redu reakcije. Je li uvijek rješiva separacijom varijabli?

Zakon brzine reakcije?

$$v = k \cdot [R_1]^{m_1} \cdot [R_2]^{m_2} \cdot \dots$$

Zbroj $m_1 + m_2 + \dots$ zove se **red reakcije**. Kojeg je reda odgovarajuća diferencijalna jednažba? Uvijek je 1. reda, neovisno o redu reakcije. Je li uvijek rješiva separacijom varijabli? Da!

$$\frac{dx}{dt} = k ([R_1]_0 + \nu_1 x)^{m_1} ([R_2]_0 + \nu_2 x)^{m_2} \dots$$

Ako na brzinu reakcije utječe više od jednog reaktanta, za integriranje nam treba

Zakon brzine reakcije?

$$v = k \cdot [R_1]^{m_1} \cdot [R_2]^{m_2} \cdot \dots$$

Zbroj $m_1 + m_2 + \dots$ zove se **red reakcije**. Kojeg je reda odgovarajuća diferencijalna jednačba? Uvijek je 1. reda, neovisno o redu reakcije. Je li uvijek rješiva separacijom varijabli? Da!

$$\frac{dx}{dt} = k ([R_1]_0 + \nu_1 x)^{m_1} ([R_2]_0 + \nu_2 x)^{m_2} \dots$$

Ako na brzinu reakcije utječe više od jednog reaktanta, za integriranje nam treba rastav na parcijalne razlomke.

Zadatak

Dokažite da vrijeme polureakcije $t_{1/2}$ kod reakcija koje su prvog reda i na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant ne ovisi o početnim koncentracijama sudionika reakcije.

Zadatak

Reakcija stehiometrije $A + 3B \longrightarrow 2C$ je drugog reda ($m = 2$) s ima parcijalnim redovima 1 ($m_1 = m_2 = 1$) s obzirom na oba reaktanta kojima su početne koncentracije jednake. Koja je mjerna jedinica koeficijenta brzine reakcije? Skicirajte ovisnosti koncentracija svih sudionika o vremenu. Ako je koeficijent brzine reakcije, do na gore spomenutu mjernu jedinicu, iznosa , te ako su početne koncentracije oba reaktanta $0,150 \text{ mol/L}$, a produkta na početku reakcije nema, kada će koncentracija produkta nadmašiti koncentracije oba reaktanta?

Zadatak

Reakcija stehiometrije $A + 3B \longrightarrow 2C$ je drugog reda ($m = 2$) s ima parcijalnim redovima 1 ($m_1 = m_2 = 1$) s obzirom na oba reaktanta kojima su početne koncentracije jednake. Koja je mjerna jedinica koeficijenta brzine reakcije? Skicirajte ovisnosti koncentracija svih sudionika o vremenu. Ako je koeficijent brzine reakcije, do na gore spomenutu mjernu jedinicu, iznosa , te ako su početne koncentracije oba reaktanta $0,150 \text{ mol/L}$, a produkta na početku reakcije nema, kada će koncentracija produkta nadmašiti koncentracije oba reaktanta?

ODJ koje možemo zapisati u obliku $y' + a(x)y = b(x)$ zovemo

Zadatak

Reakcija stehiometrije $A + 3B \longrightarrow 2C$ je drugog reda ($m = 2$) s ima parcijalnim redovima 1 ($m_1 = m_2 = 1$) s obzirom na oba reaktanta kojima su početne koncentracije jednake. Koja je mjerna jedinica koeficijenta brzine reakcije? Skicirajte ovisnosti koncentracija svih sudionika o vremenu. Ako je koeficijent brzine reakcije, do na gore spomenutu mjernu jedinicu, iznosa , te ako su početne koncentracije oba reaktanta $0,150 \text{ mol/L}$, a produkta na početku reakcije nema, kada će koncentracija produkta nadmašiti koncentracije oba reaktanta?

ODJ koje možemo zapisati u obliku $y' + a(x)y = b(x)$ zovemo **linearne diferencijalne jednačbe 1. reda**, a jednačbe koje se mogu zapisati u obliku $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$ zovu se

Zadatak

Reakcija stehiometrije $A + 3B \longrightarrow 2C$ je drugog reda ($m = 2$) s ima parcijalnim redovima 1 ($m_1 = m_2 = 1$) s obzirom na oba reaktanta kojima su početne koncentracije jednake. Koja je mjerna jedinica koeficijenta brzine reakcije? Skicirajte ovisnosti koncentracija svih sudionika o vremenu. Ako je koeficijent brzine reakcije, do na gore spomenutu mjernu jedinicu, iznosa , te ako su početne koncentracije oba reaktanta $0,150 \text{ mol/L}$, a produkta na početku reakcije nema, kada će koncentracija produkta nadmašiti koncentracije oba reaktanta?

ODJ koje možemo zapisati u obliku $y' + a(x)y = b(x)$ zovemo **linearne diferencijalne jednačbe 1. reda**, a jednačbe koje se mogu zapisati u obliku $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$ zovu se **Bernoullijeve jednačbe**. Za koje α ima smisla razlikovati ta dva tipa?

Zadatak

Reakcija stehiometrije $A + 3B \longrightarrow 2C$ je drugog reda ($m = 2$) s ima parcijalnim redovima 1 ($m_1 = m_2 = 1$) s obzirom na oba reaktanta kojima su početne koncentracije jednake. Koja je mjerna jedinica koeficijenta brzine reakcije? Skicirajte ovisnosti koncentracija svih sudionika o vremenu. Ako je koeficijent brzine reakcije, do na gore spomenutu mjernu jedinicu, iznosa , te ako su početne koncentracije oba reaktanta $0,150 \text{ mol/L}$, a produkta na početku reakcije nema, kada će koncentracija produkta nadmašiti koncentracije oba reaktanta?

ODJ koje možemo zapisati u obliku $y' + a(x)y = b(x)$ zovemo **linearne diferencijalne jednačbe 1. reda**, a jednačbe koje se mogu zapisati u obliku $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$ zovu se **Bernoullijeve jednačbe**. Za koje α ima smisla razlikovati ta dva tipa? Za $\alpha \neq 0, 1$ se Bernoullijeva jednačba supstitucijom $v = y^{1-\alpha}$ svodi na linearnu. Kako se rješavaju linearne ODJ 1. reda?

Zadatok

$$L \dot{I} + R I = E \text{ uz } L, R, E = \text{const.}, I(0) = 0;$$

Zadatak

$$L \dot{I} + R I = E \text{ uz } L, R, E = \text{const.}, I(0) = 0; \quad xy' = 4y + x^2 \sqrt{y}$$

Zadatak

$$L \dot{I} + R I = E \text{ uz } L, R, E = \text{const.}, I(0) = 0; \quad xy' = 4y + x^2 \sqrt{y}$$

Zadatak

Odredite sve krivulje za koje je površina trokuta omeđenog s osi apscisa, tangentom na pojedinu krivulju u bilo kojoj njenoj točki i radij-vektorom te točke konstantna.

Zadatak

$$L \dot{I} + R I = E \text{ uz } L, R, E = \text{const.}, I(0) = 0; \quad xy' = 4y + x^2 \sqrt{y}$$

Zadatak

Odredite sve krivulje za koje je površina trokuta omeđenog s osi apscisa, tangentom na pojedinu krivulju u bilo kojoj njenoj točki i radij-vektorom te točke konstantna.

Zadatak

Cisterna sadrži 10000 litara rasol masene koncentracije NaCl $\gamma_0 = \frac{1}{100}$ kg/L. U cisternu se brzinom 20 L/min počne ulijevati rasol s $\gamma(\text{NaCl}) = \frac{1}{50}$ kg/L, a iz cisterne se dobro izmiješan rasol izlijeva konstantnom brzinom a L/min. Kako masa soli u cisterni ovisi o vremenu ako je a manje, jednako ili veće od 20 L/min? Za slučajeve u kojima to ima smisla odredite ravnotežnu masu soli. Ako smatramo da se ravnoteža postigla kad u dvije uzastopne minute razlika mase bude manja od 10^{-8} kg, kada se postiže?