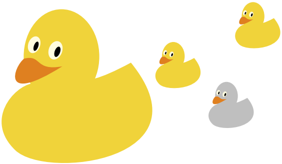
13. predavanje: Linearne diferencijalne jednadžbe reda viših redova

Franka Miriam Brückler



Koje od sljedećih ODJ su linearne? Za svaku odredite i njezin red! Koje od linearnih su s konstantnim koeficijentima? Homogene?

$y = 2y't + \frac{1}{y'}$ $\quad 1 + (y')^2 = 2yy''$ $\quad y'''' + 3y' = 3y'' + y$

$y'' - 4ty' + 4y = 0$ $\quad y'' + ty' - t^2 = 0$ $\quad y' - 2y = \sin t$

Koje od sljedećih ODJ su linearne? Za svaku odredite i njezin red! Koje od linearnih su s konstantnim koeficijentima? Homogene?

$y = 2y't + \frac{1}{y'}$ $\quad 1 + (y')^2 = 2yy''$ $\quad y'''' + 3y' = 3y'' + y$

$y'' - 4ty' + 4y = 0$ $\quad y'' + ty' - t^2 = 0$ $\quad y' - 2y = \sin t$

Definicija

Linearna diferencijalna jednadžba reda n je ODJ koja se može zapisati u obliku

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} \ldots + a_2(t)\, y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t). \quad (1)$$

Ako je b nulfunkcija, govorimo o homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi. U slučaju nehomogene jednadžbe, jednadžbu koja se dobije zamjenom b s nulfunkcijom zovemo pripadnom homogenom jednadžbom. Ako su sve funkcije a_{n-1}, $\ldots$, a_0 konstantne, govorimo o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednadžba se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = E\,\psi(\theta),$$

gdje je I moment inercije sustava, E kinetička energija rotacije, a θ opisuje orijentaciju rotora u odnosu na koordinatni sustav.

Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednadžba se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = E\,\psi(\theta),$$

gdje je I moment inercije sustava, E kinetička energija rotacije, a θ opisuje orijentaciju rotora u odnosu na koordinatni sustav.

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = -a^2\psi \qquad\qquad \psi(\theta) = C\exp(i\,a\,\theta)?$$

Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednadžba se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = E\,\psi(\theta),$$

gdje je I moment inercije sustava, E kinetička energija rotacije, a θ opisuje orijentaciju rotora u odnosu na koordinatni sustav.

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = -a^2\psi \qquad\qquad \psi(\theta) = C\exp(i\,a\,\theta)?$$

Da bi bilo fizički smisleno mora biti periodičko s periodom 2π:

Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednadžba se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = E\,\psi(\theta),$$

gdje je I moment inercije sustava, E kinetička energija rotacije, a θ opisuje orijentaciju rotora u odnosu na koordinatni sustav.

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = -a^2\psi \qquad \psi(\theta) = C\exp(i\,a\,\theta)?$$

Da bi bilo fizički smisleno mora biti periodičko s periodom 2π:
$a = n \in \mathbb{Z}$ („kvantni broj”)

Zadatak

Riješite $y' - 2y = \sin t$ *i usporedite opće rješenje te jednadžbe s općim rješenjem pripadne homogene jednadžbe.*

Zadatak

Riješite $y' - 2y = \sin t$ *i usporedite opće rješenje te jednadžbe s općim rješenjem pripadne homogene jednadžbe.*

Teorem

Opće rješenje svake linearne diferencijalne jednadžbe uvijek je oblika

$$y = y_H + y_P,$$

gdje je y_P *jedno partikularno rješenje zadane jednadžbe, a* y_H *je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe.*

Ako je jednadžba homogena, y_P je

Zadatak

Riješite $y' - 2y = \sin t$ *i usporedite opće rješenje te jednadžbe s općim rješenjem pripadne homogene jednadžbe.*

Teorem

Opće rješenje svake linearne diferencijalne jednadžbe uvijek je oblika

$$y = y_H + y_P,$$

gdje je y_P *jedno partikularno rješenje zadane jednadžbe, a* y_H *je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe.*

Ako je jednadžba homogena, y_P je nulfunkcija.

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svake homogene linearne ODJ vektorski prostor.

Teorem

Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Što sve iz toga možemo zaključiti?

Teorem

Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Što sve iz toga možemo zaključiti? Fundamentalni skup rješenja je baza $(y_1, \ldots, y_n)$ prostora rješenja homogene linearne ODJ reda n. Ako je $n = 2$, kako ćemo za (y_1, y_2) provjeriti da je fundamentalan skup?

Teorem

Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Što sve iz toga možemo zaključiti? Fundamentalni skup rješenja je baza $(y_1, \ldots, y_n)$ prostora rješenja homogene linearne ODJ reda n. Ako je $n = 2$, kako ćemo za (y_1, y_2) provjeriti da je fundamentalan skup? Znate li primjere po dvije linearno nezavisne funkcije?

Teorem

Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Što sve iz toga možemo zaključiti? Fundamentalni skup rješenja je baza $(y_1, \ldots, y_n)$ prostora rješenja homogene linearne ODJ reda n. Ako je $n = 2$, kako ćemo za (y_1, y_2) provjeriti da je fundamentalan skup? Znate li primjere po dvije linearno nezavisne funkcije? Općenito se linearna nezavisnost n funkcija može provjeriti pomoću

Teorem

Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda je n-dimenzionalni vektorski prostor.

Što sve iz toga možemo zaključiti? Fundamentalni skup rješenja je baza $(y_1, \ldots, y_n)$ prostora rješenja homogene linearne ODJ reda n. Ako je $n = 2$, kako ćemo za (y_1, y_2) provjeriti da je fundamentalan skup? Znate li primjere po dvije linearno nezavisne funkcije? Općenito se linearna nezavisnost n funkcija može provjeriti pomoću Wronskijana:

$$W(y_1, \ldots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & \ldots & y_n''(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisne

Zadatak

Provjerite linearnu nezavisnost funkcija e^x, $\sin x$ *i* $\cos x$ *te nađite jednu homogenu linearnu ODJ kojoj je to fundamentalni skup rješenja.*

Zadatak

Provjerite linearnu nezavisnost funkcija e^x, $\sin x$ *i* $\cos x$ *te nađite jednu homogenu linearnu ODJ kojoj je to fundamentalni skup rješenja.*

Strategija za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi

1. Riješi pripadnu homogenu jednadžbu — nađi fundamentalni skup $\mathcal{F} = (y_1, \ldots, y_n)$. Tada je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe
$$y_H = C_1 y_1 + \ldots C_n y_n.$$
2. Ako jednadžba nije homogena, odredi jedno njeno partikularno rješenje y_P. Opće rješenje jednadžbe je tada
$$y = y_H + y_P.$$
3. Ako postoji početni uvjet, iskoristi ga za određivanje $C_1, \ldots, C_n$.

Određivanje $\mathcal{F}$ za linearne ODJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje:

Određivanje $\mathcal{F}$ za linearne ODJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje: $y = \exp(\lambda t)$

Određivanje $\mathcal{F}$ za linearne ODJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje: $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamondsuit) \quad \lambda^n + \ldots + a_2\lambda^n + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

karakteristična jednadžba jednadžbe $(\heartsuit)$

- Zapišite karakterističnu jednadžbu jednadžbe $y'' + y = 0$.

Određivanje $\mathcal{F}$ za linearne ODJ <u>s konstantnim koeficijentima</u>

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje: $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamondsuit) \quad \lambda^n + \ldots + a_2 \lambda^n + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

karakteristična jednadžba jednadžbe $(\heartsuit)$

- Zapišite karakterističnu jednadžbu jednadžbe $y'' + y = 0$.
- Koliko najviše različitih realnih rješenja ima jednadžba $\diamondsuit$?

Određivanje $\mathcal{F}$ za linearne ODJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje: $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamondsuit) \quad \lambda^n + \ldots + a_2 \lambda^n + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

karakteristična jednadžba jednadžbe $(\heartsuit)$

- Zapišite karakterističnu jednadžbu jednadžbe $y'' + y = 0$.
- Koliko najviše različitih realnih rješenja ima jednadžba $\diamondsuit$? Što znamo o $\mathcal{F}$ ako $(\diamondsuit)$ ima n različitih realnih rješenja?

Određivanje $\mathcal{F}$ za linearne ODJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje: $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamondsuit) \quad \lambda^n + \ldots + a_2 \lambda^n + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

karakteristična jednadžba jednadžbe $(\heartsuit)$

- Zapišite karakterističnu jednadžbu jednadžbe $y'' + y = 0$.
- Koliko najviše različitih realnih rješenja ima jednadžba $\diamondsuit$? Što znamo o $\mathcal{F}$ ako $(\diamondsuit)$ ima n različitih realnih rješenja?
- Na primjeru jednadžbe $y'' - 5y' + 4y = 0$ objasnite zašto je ovdje korišten već ranije vezano za linearne operatore uveden pojam karakteristične jednadžbe?

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = t\,\exp(\lambda_1 t)$. Za ovaj slučaj dokažite da se radi o $\mathcal{F}$!
- $\lambda_1 = \overline{\lambda 2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, $y_2 = \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$. Za ovaj slučaj objasnite kako se dobije ovaj oblik od $\mathcal{F}$!

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = t\exp(\lambda_1 t)$. Za ovaj slučaj dokažite da se radi o $\mathcal{F}$!
- $\lambda_1 = \overline{\lambda 2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, $y_2 = \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$. Za ovaj slučaj objasnite kako se dobije ovaj oblik od $\mathcal{F}$!

Zadatak

Što je harmonijski oscilator?

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = t\,\exp(\lambda_1 t)$. Za ovaj slučaj dokažite da se radi o $\mathcal{F}$!
- $\lambda_1 = \overline{\lambda 2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, $y_2 = \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$. Za ovaj slučaj objasnite kako se dobije ovaj oblik od $\mathcal{F}$!

Zadatak

Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator?

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = t\exp(\lambda_1 t)$. Za ovaj slučaj dokažite da se radi o $\mathcal{F}$!
- $\lambda_1 = \overline{\lambda 2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, $y_2 = \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$. Za ovaj slučaj objasnite kako se dobije ovaj oblik od $\mathcal{F}$!

Zadatak

Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? A ako je s trenjem?

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$. Za ovaj slučaj dokažite da se radi o $\mathcal{F}$!
- $\lambda_1 = \overline{\lambda 2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$, $y_2 = \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$. Za ovaj slučaj objasnite kako se dobije ovaj oblik od $\mathcal{F}$!

Zadatak

Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? A ako je s trenjem? A ako je s vanjskom silom?

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$. Za ovaj slučaj dokažite da se radi o $\mathcal{F}$!
- $\lambda_1 = \overline{\lambda 2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$, $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$. Za ovaj slučaj objasnite kako se dobije ovaj oblik od $\mathcal{F}$!

Zadatak

Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? A ako je s trenjem? A ako je s vanjskom silom? A ako je kvantni (bez trenja i vanjske sile)?

Koji su mogući slučajevi za $n = 2$? Kako u svakom od njih dobijemo $\mathcal{F} = (y_1, y_2)$?

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$. Za ovaj slučaj dokažite da se radi o $\mathcal{F}$!
- $\lambda_1 = \overline{\lambda 2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$, $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$. Za ovaj slučaj objasnite kako se dobije ovaj oblik od $\mathcal{F}$!

Zadatak

Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? A ako je s trenjem? A ako je s vanjskom silom? A ako je kvantni (bez trenja i vanjske sile)? Analizirajte i skicirajte sva moguća rješenja za klasični harmonijski oscilator bez vanjske sile!

Zadatak

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona $E(t) = 100\cos(10t/\mathrm{s})\,\mathrm{V}$, *otpornika otpora* $R = 40\,\Omega$, *kondenzatora kapaciteta* $C = 16 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$, *zavojnice konstantne induktivnosti* $L = 1\,\mathrm{H}$ *i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte* $Q = Q(t)$ *i* $I = I(t)$ *za velike* t*!*

Zadatak

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona $E(t) = 100\cos(10t/\mathrm{s})\,\mathrm{V}$, otpornika otpora $R = 40\,\Omega$, kondenzatora kapaciteta $C = 16 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$, zavojnice konstantne induktivnosti $L = 1\,\mathrm{H}$ i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte $Q = Q(t)$ i $I = I(t)$ za velike t!

2. Kirchhoffov zakon $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$

Zadatak

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona $E(t) = 100\cos(10t/\mathrm{s})\,\mathrm{V}$, otpornika otpora $R = 40\,\Omega$, kondenzatora kapaciteta $C = 16\cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$, zavojnice konstantne induktivnosti $L = 1\,\mathrm{H}$ i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte $Q = Q(t)$ i $I = I(t)$ za velike t!

2. Kirchhoffov zakon $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$

$E_L = L\dot{I}$, $E_R = R\,I$, $E_C = Q/C$,

Zadatak

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona $E(t) = 100\cos(10t/\mathrm{s})\,\mathrm{V}$, otpornika otpora $R = 40\,\Omega$, kondenzatora kapaciteta $C = 16 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$, zavojnice konstantne induktivnosti $L = 1\,\mathrm{H}$ i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte $Q = Q(t)$ i $I = I(t)$ za velike t!

2. Kirchhoffov zakon $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$
$E_L = L\dot{I}$, $E_R = R\,I$, $E_C = Q/C$, $I = \dot{Q} \Rightarrow$

$$\ddot{Q} + 40\dot{Q} + 625Q = 100\cos(10t)$$

Zadatak

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona $E(t) = 100\cos(10t/\mathrm{s})\,\mathrm{V}$, otpornika otpora $R = 40\,\Omega$, kondenzatora kapaciteta $C = 16\cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$, zavojnice konstantne induktivnosti $L = 1\,\mathrm{H}$ i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte $Q = Q(t)$ i $I = I(t)$ za velike t!

2. Kirchhoffov zakon $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$
$E_L = L\dot{I}$, $E_R = R\,I$, $E_C = Q/C$, $I = \dot{Q} \Rightarrow$

$$\ddot{Q} + 40\dot{Q} + 625Q = 100\cos(10t) \qquad Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t)$$

$$\lambda^2 + 40\lambda + 625 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -20 \pm 15i$$

$$Q_H(t) = \exp(-20t/\mathrm{s})\,\left(C_1\cos(15t/\mathrm{s})) + C_2\sin(15t/\mathrm{s})\right)\,\mathrm{C}$$

$$Q_P(t) = ?$$

Zadatak

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona $E(t) = 100\cos(10t/\text{s})\,\text{V}$, otpornika otpora $R = 40\,\Omega$, kondenzatora kapaciteta $C = 16 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$, zavojnice konstantne induktivnosti $L = 1\,\text{H}$ i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte $Q = Q(t)$ i $I = I(t)$ za velike t!

2. Kirchhoffov zakon $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$
$E_L = L\,\dot{I}$, $E_R = R\,I$, $E_C = Q/C$, $I = \dot{Q} \Rightarrow$

$$\ddot{Q} + 40\dot{Q} + 625Q = 100\cos(10t) \qquad Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t)$$

$$\lambda^2 + 40\lambda + 625 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -20 \pm 15i$$

$$Q_H(t) = \exp(-20t/\text{s})\,\left(C_1\cos(15t/\text{s})\right) + C_2\sin(15t/\text{s})\right)\,\text{C}$$

$$Q_P(t) = ?$$

$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(t)$

- Metoda neodređenih koeficijenata

- Metoda varijacije konstante

$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(t)$

- Metoda neodređenih koeficijenata Ako je $b(t)$ polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je $b(t)$ zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za y_P).

- Metoda varijacije konstante

$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$

- Metoda neodređenih koeficijenata Ako je $b(t)$ polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je $b(t)$ zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za y_P). Ako je pretpostavljeni oblik već uključen u y_H, onda se oblik za y_P množi s t.
- Metoda varijacije konstante

$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$

- Metoda neodređenih koeficijenata Ako je $b(t)$ polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je $b(t)$ zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za y_P). Ako je pretpostavljeni oblik već uključen u y_H, onda se oblik za y_P množi s t.
- Metoda varijacije konstante Konstante C_1 i C_2 u $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$ se uzmu kao funkcije od t.

- Metoda neodređenih koeficijenata Ako je $b(t)$ polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je $b(t)$ zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za y_P). Ako je pretpostavljeni oblik već uključen u y_H, onda se oblik za y_P množi s t.
- Metoda varijacije konstante Konstante C_1 i C_2 u $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$ se uzmu kao funkcije od t. Dobije se sustav

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = b$$

Odredimo $Q_P(t)$ metodom varijacije konstante:
$E(t) = 100\cos(10t) = 100\cos(10t) + 0\sin(10t) \Rightarrow$
$Q_P(t) = A\cos(10t) + B\sin(10t)$

Odredimo $Q_P(t)$ metodom varijacije konstante:
$E(t) = 100\cos(10t) = 100\cos(10t) + 0\sin(10t) \Rightarrow$
$Q_P(t) = A\cos(10t) + B\sin(10t) \Rightarrow$

$(525A + 400B)\cos(10t) + (-400A + 525B)\sin(10t) = 100\cos(10t)$

$$A = 84/697, B = 64/697$$

Odredimo $Q_P(t)$ metodom varijacije konstante:
$E(t) = 100\cos(10t) = 100\cos(10t) + 0\sin(10t) \Rightarrow$
$Q_P(t) = A\cos(10t) + B\sin(10t) \Rightarrow$

$(525A+400B)\cos(10t)+(-400A+525B)\sin(10t) = 100\cos(10t)$

$$A = 84/697, B = 64/697$$

$$Q(t) = \exp(-\frac{20t}{\mathrm{s}})\left(C_1\cos(\frac{15t}{\mathrm{s}}) + C_2\sin(\frac{15t}{\mathrm{s}})\right)\mathrm{C}+$$
$$+\frac{84\,\mathrm{C}}{697}\cos(\frac{10t}{\mathrm{s}}) + \frac{64\,\mathrm{C}}{697}\sin(\frac{10t}{\mathrm{s}})$$

Odredimo $Q_P(t)$ metodom varijacije konstante:
$E(t) = 100\cos(10t) = 100\cos(10t) + 0\sin(10t) \Rightarrow$
$Q_P(t) = A\cos(10t) + B\sin(10t) \Rightarrow$

$(525A + 400B)\cos(10t) + (-400A + 525B)\sin(10t) = 100\cos(10t)$

$$A = 84/697, B = 64/697$$

$$Q(t) = \exp(-\frac{20t}{\text{s}})\left(C_1\cos(\frac{15t}{\text{s}}) + C_2\sin(\frac{15t}{\text{s}})\right)\text{C}+$$
$$+\frac{84\,\text{C}}{697}\cos(\frac{10t}{\text{s}}) + \frac{64\,\text{C}}{697}\sin(\frac{10t}{\text{s}})$$

$$\dot{Q}(t) = \exp(-20t)\,((-20C_1 + 15C_2)\cos(15t) + (-20C_2 - 15C_1)\sin(15t)$$
$$-\frac{840}{697}\sin(10t) + \frac{640}{697}\cos(10t)$$
$$Q(0) = \dot{Q}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{84}{697}, C_2 = -\frac{464}{2091}$$

$$\frac{Q(t)}{\mathrm{C}} = \exp(-\frac{20t}{\mathrm{s}})\left(-\frac{84}{697}\cos(\frac{15t}{\mathrm{s}}) - \frac{464}{2091}\sin(\frac{15t}{\mathrm{s}})\right) +$$

$$+\frac{84}{697}\cos(\frac{10t}{\mathrm{s}}) + \frac{64}{697}\sin(\frac{10t}{\mathrm{s}})$$

$$\frac{I(t)}{\mathrm{A}} = \exp(-20t)\left(-\frac{640}{697}\cos(\frac{15t}{\mathrm{s}}) + \frac{13060}{2091}\sin(\frac{15t}{\mathrm{s}})\right) -$$

$$-\frac{840}{697}\sin(\frac{10t}{\mathrm{s}}) + \frac{640}{697}\cos(\frac{10t}{\mathrm{s}})$$

$$\frac{Q(t)}{\mathrm{C}} = \exp(-\frac{20t}{\mathrm{s}})\left(-\frac{84}{697}\cos(\frac{15t}{\mathrm{s}}) - \frac{464}{2091}\sin(\frac{15t}{\mathrm{s}})\right) +$$

$$+\frac{84}{697}\cos(\frac{10t}{\mathrm{s}}) + \frac{64}{697}\sin(\frac{10t}{\mathrm{s}})$$

$$\frac{I(t)}{\mathrm{A}} = \exp(-20t)\left(-\frac{640}{697}\cos(\frac{15t}{\mathrm{s}}) + \frac{13060}{2091}\sin(\frac{15t}{\mathrm{s}})\right) -$$

$$-\frac{840}{697}\sin(\frac{10t}{\mathrm{s}}) + \frac{640}{697}\cos(\frac{10t}{\mathrm{s}})$$

Za velike t je

$\frac{Q(t)}{\mathrm{C}} \approx \frac{4}{\sqrt{697}} \sin\left(\frac{10t}{\mathrm{s}} + \operatorname{arctg}\frac{21}{16}\right) \approx 0{,}1515 \sin\left(\frac{10t}{\mathrm{s}} + 0{,}9197\right)$,

$\frac{I(t)}{\mathrm{A}} \approx -\frac{40}{\sqrt{697}} \sin\left(\frac{10t}{\mathrm{s}} - \operatorname{arctg}\frac{16}{21}\right) \approx 1{,}515 \sin\left(\frac{10t}{\mathrm{s}} - 0{,}6511\right)$

Zadatak

Objema metodama riješite

$$y'' + 2y' + y = 2\exp(-x) + 4\exp(x).$$

Zadatak

Objema metodama riješite

$$y'' + 2y' + y = 2\exp(-x) + 4\exp(x).$$

Zadatak

Riješite

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$