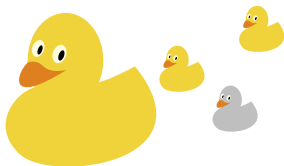


# 13. Linearne diferencijalne jednadžbe reda viših redova. Sustavi linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda.

*Franka Miriam Brückler*

---



# Linearne diferencijalne jednačbe

**Linearna diferencijalna jednačba reda  $n$**  je ODJ koja se može zapisati u obliku

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} \dots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t).$$

- $b(t) = 0$ : **homogena LDJ (HLDJ)**
- Za nehomogenu LDJ, ako stavimo  $b(t) = 0$  dobijemo **pripadnu homogenu jednačbu**
- ako su  $a_{n-1}, \dots, a_0$  konstantne: **LDJ s konstantnim koeficijentima (LDJKK)**

Koje od sljedećih ODJ su linearne? Kojeg su reda? Koje od LDJ su s KK? Homogene?

$$y = 2y't + \frac{1}{y'} \quad 1 + (y')^2 = 2yy'' \quad y'''' + 3y' = 3y'' + y$$
$$y'' - 4ty' + 4y = 0 \quad y'' + ty' - t^2 = 0 \quad y' - 2y = \sin t$$

## Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednačina se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = E \psi(\theta).$$

## Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednačina se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = E \psi(\theta).$$

Za LDJ 1. reda smo vidjeli da je opće rješenje oblika  $y = y_H + y_P$ .

## Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednačina se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = E \psi(\theta).$$

Za LDJ 1. reda smo vidjeli da je opće rješenje oblika  $y = y_H + y_P$ .  
To vrijedi i općenito:

### Teorem

Opće rješenje svake LDJ uvijek je oblika  $y = y_H + y_P$ , gdje je  $y_P$  jedno partikularno rješenje zadane jednačine, a  $y_H$  je opće rješenje pripadne homogene jednačine.

## Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini

Schrödingerova jednačina se svodi na ODJ

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = E \psi(\theta).$$

Za LDJ 1. reda smo vidjeli da je opće rješenje oblika  $y = y_H + y_P$ .  
To vrijedi i općenito:

### Teorem

Opće rješenje svake LDJ uvijek je oblika  $y = y_H + y_P$ , gdje je  $y_P$  jedno partikularno rješenje zadane jednačine, a  $y_H$  je opće rješenje pripadne homogene jednačine.

### Teorem

Skup svih rješenja HLDJ  $n$ -tog reda je  $n$ -dimenzionalni vektorski prostor.

**Fundamentalni skup rješenja** je baza  $(y_1, \dots, y_n)$  prostora rješenja HLDJ reda  $n$ .

### Zadatak

*Za  $n = 2$ , kako ćemo za  $(y_1, y_2)$  provjeriti da je fundamentalan skup? Navedite dva različita para linearno nezavisnih funkcija.*

**Fundamentalni skup rješenja** je baza  $(y_1, \dots, y_n)$  prostora rješenja HLDJ reda  $n$ .

### Zadatak

Za  $n = 2$ , kako ćemo za  $(y_1, y_2)$  provjeriti da je fundamentalan skup? Navedite dva različita para linearno nezavisnih funkcija.

Linearna nezavisnost  $n$  funkcija se može provjeriti pomoću

**Wronskijana:**

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & \dots & y_n''(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  linearno nezavisne

### Zadatak

Provjerite linearnu nezavisnost funkcija  $e^x$ ,  $\sin x$  i  $\cos x$ .

# Rješavanje LDJ

- 1 Riješiti pripadnu homogenu jednačbu — naći fundamentalni skup  $\mathcal{F} = (y_1, \dots, y_n)$ . Tada je opće rješenje pripadne homogene jednačbe

$$y_H = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n.$$

- 2 Ako jednačba nije homogena, odrediti jedno njeno partikularno rješenje  $y_P$  (za HLDJ je  $y_P = 0$ ).
- 3 Opće rješenje jednačbe je tada

$$y = y_H + y_P.$$

- 4 Ako su zadani početni uvjeti, iskoristiti ih za određivanje  $C_1, \dots, C_n$ .

## Određivanje $\mathcal{F}$ za HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje:

## Određivanje $\mathcal{F}$ za HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje:  $y = \exp(\lambda t)$

## Određivanje $\mathcal{F}$ za HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje:  $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamond) \quad \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

( $\diamond$ ) je karakteristična jednačina jednačine ( $\heartsuit$ )

- Zapišite karakterističnu jednačinu jednačine  $y'' + y = 0$ .

## Određivanje $\mathcal{F}$ za HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje:  $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamond) \quad \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

$(\diamond)$  je karakteristična jednačina jednačine  $(\heartsuit)$

- Zapišite karakterističnu jednačinu jednačine  $y'' + y = 0$ .
- Koliko najviše različitih realnih rješenja ima jednačina  $\diamond$ ?

## Određivanje $\mathcal{F}$ za HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje:  $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamond) \quad \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

$(\diamond)$  je karakteristična jednačina jednačine  $(\heartsuit)$

- Zapišite karakterističnu jednačinu jednačine  $y'' + y = 0$ .
- Koliko najviše različitih realnih rješenja ima jednačina  $\diamond$ ? Što znamo o  $\mathcal{F}$  ako  $(\diamond)$  ima  $n$  različitih realnih rješenja?

## Određivanje $\mathcal{F}$ za HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\heartsuit)$$

test-rješenje:  $y = \exp(\lambda t)$

$$(\diamond) \quad \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

$(\diamond)$  je karakteristična jednačina jednačine  $(\heartsuit)$

- Zapišite karakterističnu jednačinu jednačine  $y'' + y = 0$ .
- Koliko najviše različitih realnih rješenja ima jednačina  $\diamond$ ? Što znamo o  $\mathcal{F}$  ako  $(\diamond)$  ima  $n$  različitih realnih rješenja?
- Na primjeru jednačine  $y'' - 5y' + 4y = 0$  objasnite zašto je ovdje korišten već ranije vezano za linearne operatore uveden pojam karakteristične jednačine?

## Homogeni sustavi LDJ 1. reda

Homogeni sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda je sustav s  $n$  ODJ s  $n$  nepoznatih funkcija  $y_1, \dots, y_n$  iste nezavisne varijable  $t$  koji je oblika

$$Y' = A \cdot Y,$$

gdje je  $Y' = (y_1' \ y_2' \ \dots \ y_n')^t$ ,  $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^t$ ,  $A = (a_{ij}(t))_{i,j}$ .  
Kažemo da se radi o sustavu s konstantnim koeficijentima ako su sve funkcije  $a_{ij}$  konstantne, tj. ako je  $A \in M_n$ .

### Teorem

Svaka HLDJ reda  $n$  ekvivalentna je homogenom sustavu LDJ 1. reda (i obrnuto), koji se u matricnom obliku može zapisati kao  $Y' = A Y$ , gdje je  $Y = (y \ y' \ \dots \ y^{(n-1)})^t$   
Ako je polazna HLDJ reda  $n$  s KK, njena karakteristična jednadžba jednaka je karakterističnoj jednadžbi matrice  $A$ .

## Rješavanje HLDJ reda 2

Mogući slučajevi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$ .
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$ . Za ovaj slučaj dokažite da se radi o  $\mathcal{F}$ !
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ ,  
 $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

## Rješavanje HLDJ reda 2

Mogući slučajevi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$ .
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$ . Za ovaj slučaj dokažite da se radi o  $\mathcal{F}$ !
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ ,  
 $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

### Zadatak

*Što je harmonijski oscilator?*

## Rješavanje HLDJ reda 2

Mogući slučajevi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$ .
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$ . Za ovaj slučaj dokažite da se radi o  $\mathcal{F}$ !
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ ,  
 $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

### Zadatak

*Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator?*

## Rješavanje HLDJ reda 2

Mogući slučajevi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$ .
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$ . Za ovaj slučaj dokažite da se radi o  $\mathcal{F}$ !
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ ,  
 $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

### Zadatak

*Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? Zapišite ju kao odgovarajući sustav LDJ.*

## Rješavanje HLDJ reda 2

Mogući slučajevi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$ .
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$ . Za ovaj slučaj dokažite da se radi o  $\mathcal{F}$ !
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ ,  
 $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

### Zadatak

*Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? Zapišite ju kao odgovarajući sustav LDJ. A što ako je s trenjem?*

## Rješavanje HLDJ reda 2

Mogući slučajevi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$ .
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$ . Za ovaj slučaj dokažite da se radi o  $\mathcal{F}$ !
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ ,  
 $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

### Zadatak

*Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? Zapišite ju kao odgovarajući sustav LDJ. A što ako je s trenjem? Analizirajte i skicirajte sva moguća rješenja za klasični harmonijski oscilator bez vanjske sile!*

## Rješavanje HLDJ reda 2

Mogući slučajevi:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = \exp(\lambda_2 t)$ .
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\lambda_1 t)$ ,  $y_2 = t \exp(\lambda_1 t)$ . Za ovaj slučaj dokažite da se radi o  $\mathcal{F}$ !
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :  $y_1 = \exp(\alpha t) \cos(\beta t)$ ,  
 $y_2 = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

### Zadatak

*Što je harmonijski oscilator? Koja vrsta ODJ opisuje klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator? Zapišite ju kao odgovarajući sustav LDJ. A što ako je s trenjem? Analizirajte i skicirajte sva moguća rješenja za klasični harmonijski oscilator bez vanjske sile!*

### Sustav #1

Koristeći supstituciju, riješite sustav  $\dot{x} = -2x + y$ ,  $\dot{y} = 3x - 4y$ .

Homogene sustave LDJ 1. reda možemo riješiti i direktno, pomoću svojstvenih vrijednosti i vektora matrice  $A$ : Pretpostavimo li da je  $Y = \exp(\lambda t) Y_0$  rješenje sustava  $Y' = A Y$ , gdje su  $Y_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{n,0})$  i  $\lambda$  konstante, iz  $Y' = \lambda Y$  i  $Y' = A Y$  dobivamo  $A Y_0 = \lambda Y_0$ . Ako su  $Y_{0,1}, \dots, Y_{0,n}$  linearno nezavisni svojstveni vektori od  $A$ , opće rješenje sustava  $Y' = A Y$  je  $Y = C_1 \exp(\lambda_1 t) Y_{0,1} + \dots + C_n \exp(\lambda_n t) Y_{0,n}$ .

## Sustav #2

Riješite prethodni sustav koristeći gornju metodu.

## Zadatak

*Riješite sustav LDJ koji modelira reakcijski mehanizam*

$A \rightarrow B \leftrightarrow C$ :

$$\frac{dc_A}{dt} = -k_1 c_A,$$

$$\frac{dc_B}{dt} = k_1 c_A - k_2 c_B + k_{-2} c_C,$$

$$\frac{dc_C}{dt} = k_2 c_B - k_{-2} c_C$$

# Fazni dijagrami

Fazni dijagrami su vizualizacije rješenja (ne samo) homogenih sustava dviju linearnih diferencijalnih jednačbi 1. reda. Ako su nepoznate funkcije u sustavu  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$ , fazni dijagram se prikazuje u **faznoj ravnini**, tj.  $(x, y)$ -koordinatnoj ravnini. **Fazni dijagram** se sastoji od **trajektorija (orbita)** u faznoj ravnini, tj. od parametarski zadanih krivulja  $(x, y) = (x(t), y(t))$  koje predstavljaju partikularna rješenja sustava.

primjeri

# Fazni dijagrami

Fazni dijagrami su vizualizacije rješenja (ne samo) homogenih sustava dviju linearnih diferencijalnih jednačbi 1. reda. Ako su nepoznate funkcije u sustavu  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$ , fazni dijagram se prikazuje u **faznoj ravnini**, tj.  $(x, y)$ -koordinatnoj ravnini. **Fazni dijagram** se sastoji od **trajektorija (orbita)** u faznoj ravnini, tj. od parametarski zadanih krivulja  $(x, y) = (x(t), y(t))$  koje predstavljaju partikularna rješenja sustava.

primjeri

Ako je  $A$  invertibilna, konstantno rješenje  $(x(t), y(t)) = (0, 0)$  se naziva **ravnotežnim rješenjem**.

## Sustav #3

Skicirajte faznu ravninu, u njoj odaberite četiri točke (različite od ishodišta) i skicirajte odgovarajuće tangencijalne vektore.

## Sustav #4

Po čemu se ističu rješenja kod kojih je  $C_1 = 0$  odnosno  $C_2 = 0$ ? Pokažite da im trajektorije leže na dva pravca! Kako oni razdvajaju rješenja s pozitivnim i negativnim  $C_1$  odnosno  $C_2$ ? Jesu li ti pravci asimptote za trajektorije?

## Sustav #4

Po čemu se ističu rješenja kod kojih je  $C_1 = 0$  odnosno  $C_2 = 0$ ? Pokažite da im trajektorije leže na dva pravca! Kako oni razdvajaju rješenja s pozitivnim i negativnim  $C_1$  odnosno  $C_2$ ? Jesu li ti pravci asimptote za trajektorije?

## Sustav #5

Odredimo i ucrtajmo orijentaciju prvo za trajektorije koje leže na asimptotama, a zatim za sve trajektorije.

## Sustav #4

Po čemu se ističu rješenja kod kojih je  $C_1 = 0$  odnosno  $C_2 = 0$ ? Pokažite da im trajektorije leže na dva pravca! Kako oni razdvajaju rješenja s pozitivnim i negativnim  $C_1$  odnosno  $C_2$ ? Jesu li ti pravci asimptote za trajektorije?

## Sustav #5

Odredimo i ucrtajmo orijentaciju prvo za trajektorije koje leže na asimptotama, a zatim za sve trajektorije.

Desmos–Fazni dijagrami

MIT Mathlets–Fazni dijagrami

## Strujna petlja #1

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona  $E(t) = 100 \cos(10t/s) \text{ V}$ , otpornika otpora  $R = 40 \Omega$ , kondenzatora kapaciteta  $C = 16 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ , zavojnice konstantne induktivnosti  $L = 1 \text{ H}$  i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte  $Q = Q(t)$  i  $I = I(t)$  za velike  $t$ !

## Strujna petlja #1

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona  $E(t) = 100 \cos(10t/s) \text{ V}$ , otpornika otpora  $R = 40 \Omega$ , kondenzatora kapaciteta  $C = 16 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ , zavojnice konstantne induktivnosti  $L = 1 \text{ H}$  i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte  $Q = Q(t)$  i  $I = I(t)$  za velike  $t$ !

2. Kirchhoffov zakon  $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$

## Strujna petlja #1

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona  $E(t) = 100 \cos(10t/s) \text{ V}$ , otpornika otpora  $R = 40 \Omega$ , kondenzatora kapaciteta  $C = 16 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ , zavojnice konstantne induktivnosti  $L = 1 \text{ H}$  i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte  $Q = Q(t)$  i  $I = I(t)$  za velike  $t$ !

2. Kirchhoffov zakon  $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$   
 $E_L = L \dot{I}$ ,  $E_R = R I$ ,  $E_C = Q/C$ ,

## Strujna petlja #1

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona  $E(t) = 100 \cos(10t/s) \text{ V}$ , otpornika otpora  $R = 40 \Omega$ , kondenzatora kapaciteta  $C = 16 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ , zavojnice konstantne induktivnosti  $L = 1 \text{ H}$  i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte  $Q = Q(t)$  i  $I = I(t)$  za velike  $t$ !

$$2. \text{ Kirchhoffov zakon } \Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$$

$$E_L = L \dot{I}, E_R = R I, E_C = Q/C, I = \dot{Q} \Rightarrow$$
$$\ddot{Q} + 40\dot{Q} + 625Q = 100 \cos(10t)$$

## Strujna petlja #1

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona  $E(t) = 100 \cos(10t/s) \text{ V}$ , otpornika otpora  $R = 40 \Omega$ , kondenzatora kapaciteta  $C = 16 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ , zavojnice konstantne induktivnosti  $L = 1 \text{ H}$  i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte  $Q = Q(t)$  i  $I = I(t)$  za velike  $t$ !

2. Kirchhoffov zakon  $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$

$$E_L = L \dot{I}, E_R = R I, E_C = Q/C, I = \dot{Q} \Rightarrow$$

$$\ddot{Q} + 40\dot{Q} + 625Q = 100 \cos(10t) \quad Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t)$$

$$\lambda^2 + 40\lambda + 625 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -20 \pm 15i$$

$$Q_H(t) = \exp(-20t) (C_1 \cos(15t)) + C_2 \sin(15t), Q_P(t) = ?$$

## Strujna petlja #1

Jednostavna strujna petlja se sastoji od izvora napona  $E(t) = 100 \cos(10t/s) \text{ V}$ , otpornika otpora  $R = 40 \Omega$ , kondenzatora kapaciteta  $C = 16 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ , zavojnice konstantne induktivnosti  $L = 1 \text{ H}$  i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku. U početnom trenutku kondenzator je prazan, a struja ne teče. Skicirajte  $Q = Q(t)$  i  $I = I(t)$  za velike  $t$ !

2. Kirchhoffov zakon  $\Rightarrow E_L + E_R + E_C = E(t)$

$$E_L = L \dot{I}, E_R = R I, E_C = Q/C, I = \dot{Q} \Rightarrow$$

$$\ddot{Q} + 40\dot{Q} + 625Q = 100 \cos(10t) \quad Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t)$$

$$\lambda^2 + 40\lambda + 625 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -20 \pm 15i$$

$$Q_H(t) = \exp(-20t) (C_1 \cos(15t)) + C_2 \sin(15t), Q_P(t) = ?$$

## Zadatak

*Kakva ODJ koja opisuje harmonijski oscilator s vanjskom silom?*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

- Metoda neodređenih koeficijenata
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Metoda varijacije konstante

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

- **Metoda neodređenih koeficijenata** Ako je  $b(t)$  polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je  $b(t)$  zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za  $y_p$ ).
  
- **Metoda varijacije konstante**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

- **Metoda neodređenih koeficijenata** Ako je  $b(t)$  polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je  $b(t)$  zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za  $y_P$ ). Ako je pretpostavljeni oblik već uključen u  $y_H$ , onda se oblik za  $y_P$  množi s  $t$ .
- **Metoda varijacije konstante**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

- **Metoda neodređenih koeficijenata** Ako je  $b(t)$  polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je  $b(t)$  zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za  $y_P$ ). Ako je pretpostavljeni oblik već uključen u  $y_H$ , onda se oblik za  $y_P$  množi s  $t$ .
- **Metoda varijacije konstante** Konstante  $C_1$  i  $C_2$  u  $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$  se uzmu kao funkcije od  $t$ .

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

- **Metoda neodređenih koeficijenata** Ako je  $b(t)$  polinom, eksponencijalna funkcija ili linearna kombinacija sinusa i kosinusa s istim periodom, ili umnožak dvoje ili svo troje od toga, te ako je  $b(t)$  zbroj takvih članova (u tom slučaju se za svaki član traži zasebna komponenta za  $y_P$ ). Ako je pretpostavljeni oblik već uključen u  $y_H$ , onda se oblik za  $y_P$  množi s  $t$ .
- **Metoda varijacije konstante** Konstante  $C_1$  i  $C_2$  u  $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$  se uzmu kao funkcije od  $t$ . Dobije se sustav

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = b$$

koji se najlakše riješi Cramerovim pravilom. Što je determinanta matrice ovog sustava?

## Strujna petlja #2

Odredimo  $Q_P(t)$  metodom neodređenih koeficijenata:

$$E(t) = 100 \cos(10t) = 100 \cos(10t) + 0 \sin(10t) \Rightarrow$$

$$Q_P(t) = A \cos(10t) + B \sin(10t)$$

## Strujna petlja #2

Odredimo  $Q_P(t)$  metodom neodređenih koeficijenata:

$$E(t) = 100 \cos(10t) = 100 \cos(10t) + 0 \sin(10t) \Rightarrow$$

$$Q_P(t) = A \cos(10t) + B \sin(10t) \Rightarrow$$

$$(525A + 400B) \cos(10t) + (-400A + 525B) \sin(10t) = 100 \cos(10t)$$

$$A = \frac{84}{697}, B = \frac{64}{697}$$

## Strujna petlja #2

Odredimo  $Q_P(t)$  metodom neodređenih koeficijenata:

$$E(t) = 100 \cos(10t) = 100 \cos(10t) + 0 \sin(10t) \Rightarrow$$

$$Q_P(t) = A \cos(10t) + B \sin(10t) \Rightarrow$$

$$(525A + 400B) \cos(10t) + (-400A + 525B) \sin(10t) = 100 \cos(10t)$$

$$A = \frac{84}{697}, B = \frac{64}{697}$$

$$Q(t) = \exp(-20t) (C_1 \cos(15t) + C_2 \sin(15t)) C + \\ + \frac{84 C}{697} \cos(10t) + \frac{64 C}{697} \sin(10t)$$

## Strujna petlja #2

Odredimo  $Q_P(t)$  metodom neodređenih koeficijenata:

$$E(t) = 100 \cos(10t) = 100 \cos(10t) + 0 \sin(10t) \Rightarrow$$

$$Q_P(t) = A \cos(10t) + B \sin(10t) \Rightarrow$$

$$(525A + 400B) \cos(10t) + (-400A + 525B) \sin(10t) = 100 \cos(10t)$$

$$A = \frac{84}{697}, B = \frac{64}{697}$$

$$Q(t) = \exp(-20t) (C_1 \cos(15t) + C_2 \sin(15t)) C + \\ + \frac{84 C}{697} \cos(10t) + \frac{64 C}{697} \sin(10t)$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) \Rightarrow C_1 = -\frac{84}{697}, C_2 = -\frac{464}{2091}$$

$$\frac{Q(t)}{C} = \exp(-20t/s) \left( -\frac{84}{697} \cos(15t/s) - \frac{464}{2091} \sin(15t/s) \right) +$$
$$+ \frac{84}{697} \cos(10t/s) + \frac{64}{697} \sin(10t/s)$$

$$\frac{I(t)}{A} = \exp(-20t) \left( -\frac{640}{697} \cos(15t/s) + \frac{13060}{2091} \sin(15t/s) \right) -$$
$$- \frac{840}{697} \sin(10t/s) + \frac{640}{697} \cos(10t/s)$$

$$\frac{Q(t)}{C} = \exp(-20t/s) \left( -\frac{84}{697} \cos(15t/s) - \frac{464}{2091} \sin(15t/s) \right) +$$

$$+ \frac{84}{697} \cos(10t/s) + \frac{64}{697} \sin(10t/s)$$

$$\frac{I(t)}{A} = \exp(-20t) \left( -\frac{640}{697} \cos(15t/s) + \frac{13060}{2091} \sin(15t/s) \right) -$$

$$- \frac{840}{697} \sin(10t/s) + \frac{640}{697} \cos(10t/s)$$

Za velike  $t$  je

$$\frac{Q(t)}{C} \approx \frac{4}{\sqrt{697}} \sin \left( \frac{10t}{s} + \arctg \frac{21}{16} \right) \approx 0,1515 \sin \left( \frac{10t}{s} + 0,9197 \right),$$

$$\frac{I(t)}{A} \approx -\frac{40}{\sqrt{697}} \sin \left( \frac{10t}{s} - \arctg \frac{16}{21} \right) \approx 1,515 \sin \left( \frac{10t}{s} - 0,6511 \right)$$

## Zadatak

*Objema metodama riješite*

$$y'' + 2y' + y = 2 \exp(-x) + 4 \exp(x).$$

## Zadatak

*Objema metodama riješite*

$$y'' + 2y' + y = 2 \exp(-x) + 4 \exp(x).$$

## Zadatak

*Riješite*

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$