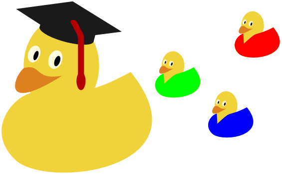
14. Skalarne funkcije više varijabli. Implicitno zadane krivulje. Parcijalne derivacije, gradijent i Hesseova matrica.

Franka Miriam Brückler



Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{n\,R\,T}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{a\,x\,y}{z}$$

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{axy}{z}$$

Skalarna (realna) funkcija više varijabli je funkcija čija domena je podskup od $\mathbb{R}^n$ (s $n > 1$), a kodomena je (podskup od) $\mathbb{R}$: imamo više nezavisnih, ali samo jednu zavisnu varijablu.

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju četiriju varijabli s, t, u, v kojoj je prirodna domena čitav $\mathbb{R}^4$ i izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u $(0, 0, 0, 0)$.

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{n\,R\,T}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{a\,x\,y}{z}$$

Skalarna (realna) funkcija više varijabli je funkcija čija domena je podskup od $\mathbb{R}^n$ (s $n > 1$), a kodomena je (podskup od) $\mathbb{R}$: imamo više nezavisnih, ali samo jednu zavisnu varijablu.

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju četiriju varijabli s, t, u, v kojoj je prirodna domena čitav $\mathbb{R}^4$ i izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u $(0, 0, 0, 0)$.

Zadatak

Osmislite neko pravilo za skalarnu funkciji dviju varijabli x i y kojoj je domena $\mathbb{R}^2$ bez ishodišta $(0, 0)$.

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

Skalarne funkcije dviju varijabli

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2,3)$?

$$f(x,y) = (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Je li to graf funkcije f? Zašto?

Skalarne funkcije dviju varijabli

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

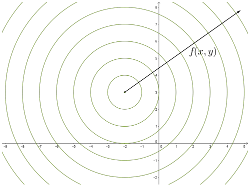
Je li to graf funkcije f? Zašto? Koje su točke ravnine za koje je $f(x, y) = 1$? 0? -1?

Skalarne funkcije dviju varijabli

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2,3)$?

$$f(x,y) = (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Je li to graf funkcije f? Zašto? Koje su točke ravnine za koje je $f(x,y) = 1$? 0? -1?

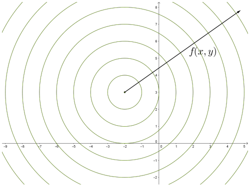


Skalarne funkcije dviju varijabli

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Je li to graf funkcije f? Zašto? Koje su točke ravnine za koje je $f(x, y) = 1$? 0? -1?



Implicitno zadana krivulja u ravnini definira se kao nivo-krivulja skalarne funkcije f dviju varijabli, tj. kao skup svih točaka (x, y) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f(x, y) = a.$$

Implicitno zadane krivulje u ravnini

Je li kružnica $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ graf neke realne funkcije jedne varijable?

Implicitno zadane krivulje u ravnini

Je li kružnica $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ graf neke realne funkcije jedne varijable? A $\boxed{\text{Kartezijev list}}$ $x^3 + y^3 = 3a\,x\,y \quad (a > 0)$?

Implicitno zadane krivulje u ravnini

Je li kružnica $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ graf neke realne funkcije jedne varijable? A $\boxed{\text{Kartezijev list}}$ $x^3+y^3=3a\,x\,y \quad (a>0)$?

Teorem o implicitnoj funkciji

Neka je (x_0, y_0) točka na krivulji $f(x,y)=a$. Označimo $g(y):=f(x_0,y)$. Ako je $g'(y_0)\neq 0$ (tangenta u promatranoj točki krivulje nije vertikalna), onda neki dio krivulje oko točke (x_0, y_0) predstavlja graf neke realne funkcije jedne varijable kojoj je domena neki otvoreni interval oko x_0.

Koeficijent smjera tangente na krivulju $f(x,y)=a$ u točki (x_0,y_0) može se odrediti implicitnim deriviranjem: jednadžbu $f(x,y)=a$ deriviramo po x na uobičajen način, uzimajući u obzir da je y funkcija od x pa koristimo kad god deriviramo izraze koji sadrže y, zbog lančanog pravila množimo njihove derivacije s y'.

Zadatak

Za a za koji je točka $(1, 1)$ *na Kartezijevom listu pokušajte što više zaključiti o njegovom izgledu i odredite jednadžbu tangente na njega u točki* $(1, 1)$.

Zadatak

Za a za koji je točka $(1,1)$ *na Kartezijevom listu pokušajte što više zaključiti o njegovom izgledu i odredite jednadžbu tangente na njega u točki* $(1,1)$.

Zadatak

$\boxed{\textit{Pascalov puž}}$ *je krivulja implicitno zadana jednadžbom* $(x^2+y^2-2a\,x)^2 = b^2(x^2+y^2)$. *Ako je* $a = 3$ *i* $b = 1$, *odredite tangentu na Pascalov puž u njegovoj točci s apscisom* 2.

Zadatak

Za a za koji je točka $(1,1)$ na Kartezijevom listu pokušajte što više zaključiti o njegovom izgledu i odredite jednadžbu tangente na njega u točki $(1,1)$.

Zadatak

$\boxed{\textit{Pascalov puž}}$ *je krivulja implicitno zadana jednadžbom $(x^2+y^2-2a\,x)^2 = b^2(x^2+y^2)$. Ako je $a=3$ i $b=1$, odredite tangentu na Pascalov puž u njegovoj točci s apscisom 2.*

Zadatak

Krivulja astroida opisana je jednadžbom $x^{2/3}+y^{2/3}=a$. U kojim točakama astroide tangente imaju koeficijent smjera -1?

Zadatak

Za a za koji je točka $(1,1)$ *na Kartezijevom listu pokušajte što više zaključiti o njegovom izgledu i odredite jednadžbu tangente na njega u točki* $(1,1)$.

Zadatak

$\boxed{\textit{Pascalov puž}}$ *je krivulja implicitno zadana jednadžbom* $(x^2+y^2-2a\,x)^2 = b^2(x^2+y^2)$. *Ako je* $a=3$ *i* $b=1$, *odredite tangentu na Pascalov puž u njegovoj točci s apscisom 2.*

Zadatak

Krivulja astroida opisana je jednadžbom $x^{2/3}+y^{2/3}=a$. *U kojim točakama astroide tangente imaju koeficijent smjera* -1*?*

Je li nivo-krivulja $f(x,y)=a$ graf funkcije f?

Zadatak

Za a za koji je točka $(1, 1)$ *na Kartezijevom listu pokušajte što više zaključiti o njegovom izgledu i odredite jednadžbu tangente na njega u točki* $(1, 1)$.

Zadatak

$\boxed{\textit{Pascalov puž}}$ *je krivulja implicitno zadana jednadžbom* $(x^2 + y^2 - 2a\,x)^2 = b^2(x^2 + y^2)$. *Ako je* $a = 3$ *i* $b = 1$, *odredite tangentu na Pascalov puž u njegovoj točci s apscisom* 2.

Zadatak

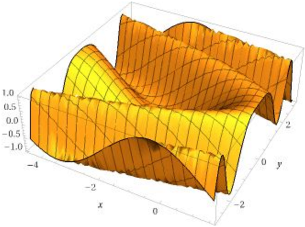
Krivulja astroida opisana je jednadžbom $x^{2/3} + y^{2/3} = a$. *U kojim točakama astroide tangente imaju koeficijent smjera* -1?

Je li nivo-krivulja $f(x, y) = a$ graf funkcije f? Nivo-krivulje $f(x, y) = a$ su podskupovi domene od f — sastoje se od onih točaka domene u kojima f postiže iznos a.

Graf skalarne funkcije dviju varijabli sastoji se od

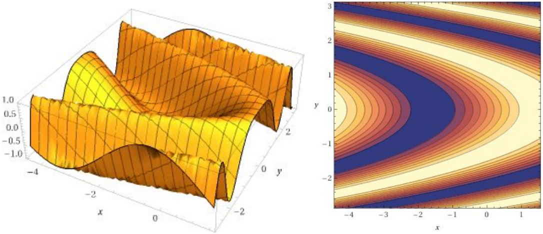
Graf skalarne funkcije dviju varijabli sastoji se od točaka (x, y, z) sa $z = f(x, y)$, dakle se može prikazati u Kartezijevom koordinatnom sustavu u (3D-)prostoru. Pritom se domena od f uzima kao podskup (x, y)-ravnine, a za pojedinu točku (x, y) iz domene njoj pridružena vrijednost $f(x, y)$ je aplikata točke grafa iznad (ili ispod) $(x, y, 0)$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin(x + y^2)$$



Graf skalarne funkcije dviju varijabli sastoji se od točaka (x, y, z) sa $z = f(x, y)$, dakle se može prikazati u Kartezijevom koordinatnom sustavu u (3D-)prostoru. Pritom se domena od f uzima kao podskup (x, y)-ravnine, a za pojedinu točku (x, y) iz domene njoj pridružena vrijednost $f(x, y)$ je aplikata točke grafa iznad (ili ispod) $(x, y, 0)$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin(x + y^2)$$

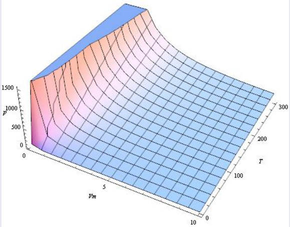


$\boxed{\text{nivo-krivulje su "izo-}z\text{-ice"}}$

Zašto ne možemo crtati grafove skalarnih funkcija s više od 2 varijable?

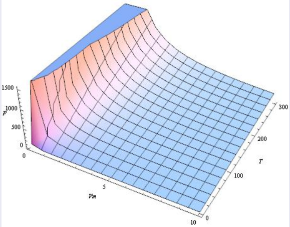
Primjer

$$p = R\,T/V_{\mathrm{m}}$$



Primjer

$$p = R\,T/V_{\mathrm{m}}$$



- p =const. — *nivo-krivulja u* (T, V_{m})*-koordinatnom sustavu*
- T =const. — *izoterma („izo-*T*-ica") u* (V_{m}, p)*-koordinatnom sustavu*
- V_{m} =const. — *izohora („izo-*V_{m}*-ica") u* (T, p)*-koordinatnom sustavu*

Zadatak

Zadana je skalarna funkcija dviju varijabli:

1. $a(x, y) = x^2 + y^2$.
2. $b(x, y) = x^2$.
3. $c(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
4. $d(x, y) = x^2 - y^2$.

Skicirajte nivo-krivulje, izo-x-ice, izo-y-ice, te graf!

Zadatak

Zadana je skalarna funkcija dviju varijabli:

1. $a(x, y) = x^2 + y^2$.
2. $b(x, y) = x^2$.
3. $c(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
4. $d(x, y) = x^2 - y^2$.

Skicirajte nivo-krivulje, izo-x-ice, izo-y-ice, te graf!

$$z = f(x, y)$$

$$z = f_y(x) \quad (y = const.) \quad z = f_x(y) \quad (x = const.)$$

Zadatak

Zadana je skalarna funkcija dviju varijabli:

1. $a(x,y) = x^2 + y^2$.
2. $b(x,y) = x^2$.
3. $c(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
4. $d(x,y) = x^2 - y^2$.

Skicirajte nivo-krivulje, izo-x-ice, izo-y-ice, te graf!

$$z = f(x,y)$$

$$z = f_y(x) \quad (y = const.) \quad z = f_x(y) \quad (x = const.)$$

Parcijalne derivacije prvog reda i gradijent

$$f_y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Zadatak

Za skalarnu funkciju f varijabli x, y i z zapišite formalnu definiciju od $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Zadatak

Za skalarnu funkciju f varijabli x, y i z zapišite formalnu definiciju od $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Ako je z zavisna varijabla, a x jedna od njezinih nezavisnih varijabli, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$, gdje je X element domene od z, aproksimira

Zadatak

Za skalarnu funkciju f varijabli x, y i z zapišite formalnu definiciju od $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Ako je z zavisna varijabla, a x jedna od njezinih nezavisnih varijabli, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$, gdje je X element domene od z, aproksimira relativnu promjenu z kad se x malo promijeni u odnosu na svoju vrijednost u X, a sve ostale nezavisne varijable se ne mijenjaju.

Primjer

$$C_V := \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,p,n}.$$

Zadatak

Za skalarnu funkciju f varijabli x, y i z zapišite formalnu definiciju od $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Ako je z zavisna varijabla, a x jedna od njezinih nezavisnih varijabli, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$, gdje je X element domene od z, aproksimira relativnu promjenu z kad se x malo promijeni u odnosu na svoju vrijednost u X, a sve ostale nezavisne varijable se ne mijenjaju.

Primjer

$$C_V := \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,p,n}.$$

Zadatak

Za $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3xy}$ izračunajte parcijalne derivacije prvog reda i gradijent te skicirajte graf, izo-x-ice, izo-y-ice i $\boxed{\text{nivo-krivulje}}$.

Gradijent i nivo-krivulje

Zadatak

Za $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ *skicirajte jednu nivo-krivulju i u nekoliko točaka pripadne gradijente. Što uočavate? Izračunajte jednadžbu tangente u jednoj točki te krivulje!*

Gradijent i nivo-krivulje

Zadatak

Za $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ *skicirajte jednu nivo-krivulju i u nekoliko točaka pripadne gradijente. Što uočavate? Izračunajte jednadžbu tangente u jednoj točki te krivulje!*

Krivulja u ravnini $\mathbb{R}^2$ je nivo-krivulja skalarne funkcije f dviju varijabli x i y uz uvjet $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ za sve (x,y) na krivulji. Koeficijent smjera tangente u točki (x_0, y_0) na krivulji $f(x,y) = a$ je

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Derivacija u smjeru

Gradijent se može koristiti procjenu promjene vrijednosti funkcije pri promjenama varijabli za iznose Δx, Δy, …(uz oznaku $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \ldots)$):

$$\langle \nabla f(X), \Delta X \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(X) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(X) \cdot \Delta y + \ldots \approx \Delta f .$$

Derivacija u smjeru

Gradijent se može koristiti procjenu promjene vrijednosti funkcije pri promjenama varijabli za iznose Δx, Δy, ... (uz oznaku $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \ldots)$):

$$\langle \nabla f(X), \Delta X \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(X) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(X) \cdot \Delta y + \ldots \approx \Delta f.$$

Prethodna formula je specijalni slučaj derivacije u smjeru: Za skalarnu funkciju f se njena derivacija u smjeru vektora u u točki X_0 definira kao

$$D_u f(X_0) := \langle \nabla f(X_0), u \rangle.$$

Zadatak

U toki $(3,3)$ izračunajte derivaciju funkcije $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3x\,y}$ u smjeru vektora $\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$ i interpetirajte ih.

Eulerovo cikličko pravilo:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

Zadatak

Ako su zadane formule

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S,$$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V, \quad C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p,$$

dokažite

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n?

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\spadesuit\partial\heartsuit}$?

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\spadesuit\partial\heartsuit}$?

Hesseova matrica skalarne funkcije f je matrica koja na poziciji (i, j) ima parcijalnu derivaciju drugog reda od f, prvo po j-toj, onda po i-toj varijabli.

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije prvog i drugog reda te gradijent i Hesseovu matricu za $f(x, y, z) = \sin(x^2 y) - z^3$.

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\spadesuit\partial\heartsuit}$?

Hesseova matrica skalarne funkcije f je matrica koja na poziciji (i, j) ima parcijalnu derivaciju drugog reda od f, prvo po j-toj, onda po i-toj varijabli.

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije prvog i drugog reda te gradijent i Hesseovu matricu za $f(x, y, z) = \sin(x^2 y) - z^3$.

Teorem (Schwarz)

Ako u nekoj točki postoje i neprekidne su sve parcijalne derivacije drugog reda skalalrne funkcije f*, onda je njezina Hesseova matrica simetrična.*