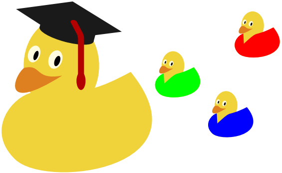
15. predavanje: Uvod u funkcije više varijabli

Franka Miriam Brückler



Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{a\,x\,y}{z}$$

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{a\,x\,y}{z}$$

Skalarna (realna) funkcija više varijabli je funkcija čija domena je podskup od $\mathbb{R}^n$ (s $n > 1$), a kodomena je (podskup od) $\mathbb{R}$.

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju četiriju varijabli x_1, x_2, x_3, x_4 *kojoj je prirodna domena čitav* $\mathbb{R}^4$ *i izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u* $(0, 0, 0, 0)$.

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{a\,x\,y}{z}$$

Skalarna (realna) funkcija više varijabli je funkcija čija domena je podskup od $\mathbb{R}^n$ (s $n > 1$), a kodomena je (podskup od) $\mathbb{R}$.

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju četiriju varijabli x_1, x_2, x_3, x_4 kojoj je prirodna domena čitav $\mathbb{R}^4$ i izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u $(0, 0, 0, 0)$.

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciji dviju varijabli x, y kojoj je domena $\mathbb{R}^2$ bez ishodišta $(0, 0)$.

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

$$f(x, y) = (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Je li to graf funkcije f? Zašto?

Skalarne funkcije dviju varijabli

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

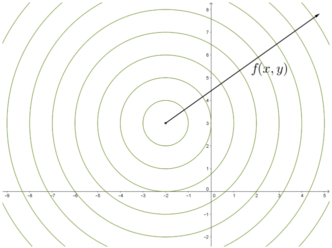
Je li to graf funkcije f? Zašto? Koje su točke ravnine za koje je $f(x, y) = 1$? 0? -1?

Skalarne funkcije dviju varijabli

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Je li to graf funkcije f? Zašto? Koje su točke ravnine za koje je $f(x, y) = 1$? 0? -1?

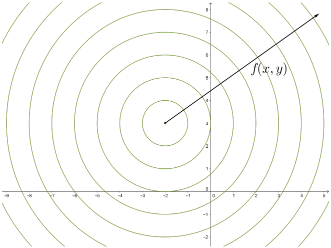


Skalarne funkcije dviju varijabli

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Je li to graf funkcije f? Zašto? Koje su točke ravnine za koje je $f(x, y) = 1$? 0? -1?



Implicitno zadane krivulje u ravnini, zadane s $f(x, y) = a$, sad ćemo nazivati nivo-krivuljama skalarne funkcije f dviju varijabli. Obično se crta nekoliko nivo-krivulja za različite iznose a.

Graf funkcije $f : D \to K$ je

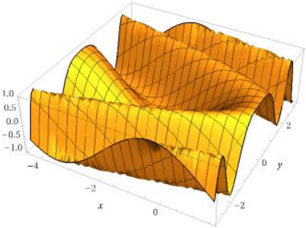
Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. U kom skupu se nalaze točke grafa skalarne funkcije dviju varijabli?

Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. U kom skupu se nalaze točke grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n?

Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. U kom skupu se nalaze točke grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n?

Graf skalarne funkcije f dviju varijabli x i y se može prikazati u Kartezijevom koordinatnom sustavu u 3D-prostoru, pri čemu se domena od f uzima kao podskup (x, y)-ravnine, a za pojedinu točku (x, y) iz domene njoj pridružena vrijednost $f(x, y)$ je aplikata točke grafa iznad (ili ispod) $(x, y, 0)$.

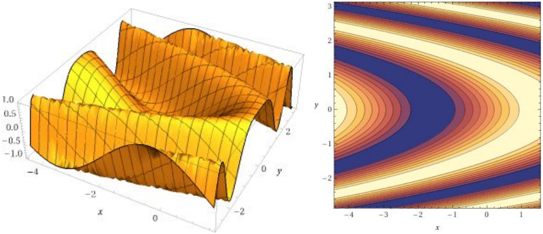
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin(x + y^2)$$



Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. U kom skupu se nalaze točke grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n?

Graf skalarne funkcije f dviju varijabli x i y se može prikazati u Kartezijevom koordinatnom sustavu u 3D-prostoru, pri čemu se domena od f uzima kao podskup (x, y)-ravnine, a za pojedinu točku (x, y) iz domene njoj pridružena vrijednost $f(x, y)$ je aplikata točke grafa iznad (ili ispod) $(x, y, 0)$.

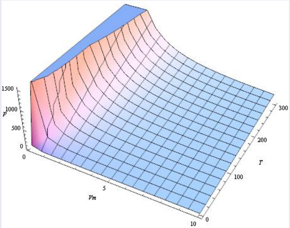
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin(x + y^2)$$



`contourplot.ggb`

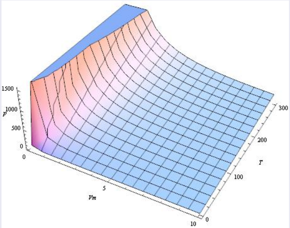
Primjer

$$p = R\,T / V_{\mathrm{m}}$$



Primjer

$$p = R\,T/V_{\mathrm{m}}$$



- $p =$*const.* — *nivo-krivulja u* (T, V_{m})*-koordinatnom sustavu*
- $T =$*const.* — *izoterma („izo-*T*-ica“) u* (V_{m}, p)*-koordinatnom sustavu*
- $V_{\mathrm{m}} =$*const.* — *izohora („izo-*V_{m}*-ica“) u* (T, p)*-koordinatnom sustavu*

https://en.wikipedia.org/wiki/Implicit_curve

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
b) $f(x,y) = x^2$.
c) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
d) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Skicirajte nivo-krivulje, izo-x-ice, izo-y-ice, te graf!

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.
(b) $f(x, y) = x^2$.
(c) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
(d) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Skicirajte nivo-krivulje, izo-x-ice, izo-y-ice, te graf!

$$z = f(x, y)$$

$$z = f_y(x) \quad (y = const.) \quad z = f_x(y) \quad (x = const.)$$

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

a. $f(x,y) = x^2 + y^2$.
b. $f(x,y) = x^2$.
c. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
d. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Skicirajte nivo-krivulje, izo-x-ice, izo-y-ice, te graf!

$$z = f(x,y)$$

$$z = f_y(x) \quad (y = const.) \quad z = f_x(y) \quad (x = const.)$$

Parcijalne derivacije prvog reda i gradijent

$$f_y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Zadatak

Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda i gradijent u $(0, 1)$ *za sve funkcije iz prethodnog zadatka i povežite s crtežima.*

Zadatak

Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda i gradijent u $(0, 1)$ *za sve funkcije iz prethodnog zadatka i povežite s crtežima.*

Gradijent skalarne funkcije dviju varijabli je primjer vektorske funkcije, tj. funkcije kojoj je kodomena podskup od $\mathbb{R}^m$ za $m > 1$. Ako je broj varijabli u domeni i kodomeni jednak, govorimo o vektorskom polju.

Zadatak

Ima li ∇f *graf?*

Zadatak

Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda i gradijent u $(0, 1)$ *za sve funkcije iz prethodnog zadatka i povežite s crtežima.*

Gradijent skalarne funkcije dviju varijabli je primjer vektorske funkcije, tj. funkcije kojoj je kodomena podskup od $\mathbb{R}^m$ za $m > 1$. Ako je broj varijabli u domeni i kodomeni jednak, govorimo o vektorskom polju.

Zadatak

Ima li ∇f *graf? Kako bismo mogli vizualizirati* ∇f *za skalarne funkcije* f *dviju varijabli?*

Zadatak

Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda i gradijent u $(0,1)$ *za sve funkcije iz prethodnog zadatka i povežite s crtežima.*

Gradijent skalarne funkcije dviju varijabli je primjer vektorske funkcije, tj. funkcije kojoj je kodomena podskup od $\mathbb{R}^m$ za $m > 1$. Ako je broj varijabli u domeni i kodomeni jednak, govorimo o vektorskom polju.

Zadatak

Ima li ∇f *graf? Kako bismo mogli vizualizirati* ∇f *za skalarne funkcije* f *dviju varijabli? Skicirajte polje gradijenta za sve četiri funkcije iz prošla dva zadatka!*

Zadatak

Izračunajte parcijalne derivacije prvog reda i gradijent u $(0,1)$ *za sve funkcije iz prethodnog zadatka i povežite s crtežima.*

Gradijent skalarne funkcije dviju varijabli je primjer vektorske funkcije, tj. funkcije kojoj je kodomena podskup od $\mathbb{R}^m$ za $m > 1$. Ako je broj varijabli u domeni i kodomeni jednak, govorimo o vektorskom polju.

Zadatak

Ima li ∇f *graf? Kako bismo mogli vizualizirati* ∇f *za skalarne funkcije* f *dviju varijabli? Skicirajte polje gradijenta za sve četiri funkcije iz prošla dva zadatka!*

Zadatak

Za $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3x\,y}$, $D_f = \{(x,y) : (x-|x|)(y-|y|) \neq 0\}$ *izračunajte parcijalne derivacije prvog reda i gradijent te skicirajte graf, izo-x-ice, izo-y-ice, nivo-krivulje i polje gradijenta!*