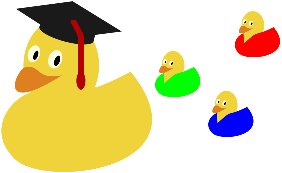
14. Plohe. Ekstremi skalarnih funkcija više varijabli.

Franka Miriam Brückler



Plohe u prostoru

Ploha u prostoru je skup $\mathcal{P}$ svih točaka $T = (x, y, z)$ koje zadovoljavaju jednadžbu oblika

$$f(x, y, z) = a$$

(tj. to je nivo-skup nke skalarne funkcije triju varijabli) uz uvjet da je

$$\nabla f(T) \neq (0, 0, 0)$$

za svaku točku T iz $\mathcal{P}$.

Plohe u prostoru

Ploha u prostoru je skup $\mathcal{P}$ svih točaka $T = (x, y, z)$ koje zadovoljavaju jednadžbu oblika

$$f(x, y, z) = a$$

(tj. to je nivo-skup nke skalarne funkcije triju varijabli) uz uvjet da je

$$\nabla f(T) \neq (0, 0, 0)$$

za svaku točku T iz $\mathcal{P}$.

Zadatak

Dokažite da su sljedeći skupovi plohe u prostoru:

- *svaka ravnina;*
- *svaka sfera* $(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - s)^2 = r^2$*;*
- *graf svake derivabilne funkcije dviju varijabli.*

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x,y,z) = a$?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = a$?

Interpretacija gradijenta

Gradijent (njegov smjer i orijentacija) skalarne funkcije f dviju ili triju varijabli u točki nivo-krivulje $f(x, y) = a$ odnosno nivo-plohe $f(x, y, z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg (najbržeg) porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x,y,z) = a$?

Interpretacija gradijenta

Gradijent (njegov smjer i orijentacija) skalarne funkcije f dviju ili triju varijabli u točki nivo-krivulje $f(x,y) = a$ odnosno nivo-plohe $f(x,y,z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg (najbržeg) porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.

Zašto smo kod definicije krivulje $f(x,y) = a$ tražili da u svakoj njezinoj točki ∇f bude različit od nulvektora?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = a$?

Interpretacija gradijenta

Gradijent (njegov smjer i orijentacija) skalarne funkcije f dviju ili triju varijabli u točki nivo-krivulje $f(x, y) = a$ odnosno nivo-plohe $f(x, y, z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg (najbržeg) porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.

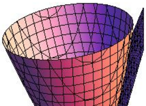
Zašto smo kod definicije krivulje $f(x, y) = a$ tražili da u svakoj njezinoj točki ∇f bude različit od nulvektora? Ima li smisla govoriti o tangenti na sferu ili neku drugu plohu? Zašto?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x,y,z) = a$?

Interpretacija gradijenta

Gradijent (njegov smjer i orijentacija) skalarne funkcije f dviju ili triju varijabli u točki nivo-krivulje $f(x,y) = a$ odnosno nivo-plohe $f(x,y,z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do največeg (najbržeg) porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.

Zašto smo kod definicije krivulje $f(x,y) = a$ tražili da u svakoj njezinoj točki ∇f bude različit od nulvektora? Ima li smisla govoriti o tangenti na sferu ili neku drugu plohu? Zašto?



Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x,y,z)=a$ u nekoj njenoj točki $X=(x_0,y_0,z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.
Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki?

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x, y, z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.
Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x, y, z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z-osi? Zašto?

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x,y,z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z-osi? Zašto?

Zadatak

Izračunajte jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na majmunovo sedlo, tj. graf funkcije $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ u njegovoj točki određenoj s $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x, y, z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z-osi? Zašto?

Zadatak

Izračunajte jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na majmunovo sedlo, tj. graf funkcije $f(x, y) = x^3 - 3x\,y^2$ u njegovoj točki određenoj s $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0, 0, 0)$ na grafu funkcije i?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^2$, $h(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x,y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0,0,0)$ na grafu funkcije i?

Za skalarnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ točku $X_0 \in D$ zovemo točkom lokalnog minimuma odnosno maksimuma funkcije f ako za sve $X \in D$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$.

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0, 0, 0)$ na grafu funkcije i?

Za skalarnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ točku $X_0 \in D$ zovemo točkom lokalnog minimuma odnosno maksimuma funkcije f ako za sve $X \in D$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$.

Koji su bili osnovni koraci postupka određivanja lokalnih ekstrema za derivabilne funkcije jedne varijable?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^2$, $h(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x,y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0,0,0)$ na grafu funkcije i?

Za skalarnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ točku $X_0 \in D$ zovemo točkom lokalnog minimuma odnosno maksimuma funkcije f ako za sve $X \in D$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$.

Koji su bili osnovni koraci postupka određivanja lokalnih ekstrema za derivabilne funkcije jedne varijable? Stacionarna točka skalarne funkcije je nultočka njenog gradijenta.

Zadatak

Ako je (x_0, y_0) stacionarna točka skalarne funkcije f dviju varijabli, što nam to govori o tangencijalnoj ravnini na graf te funkcije u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$?

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njene (glavne) minore su determinante kvadratnih matrica $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A$, gdje je A_k matrica koja se iz A dobije tako da uzmemo njenih prvih k redaka i k stupaca.

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njene (glavne) minore su determinante kvadratnih matrica $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A$, gdje je A_k matrica koja se iz A dobije tako da uzmemo njenih prvih k redaka i k stupaca. Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni mi nimum ako su sve minore Hesseove matrice $H_f(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H_f(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njene (glavne) minore su determinante kvadratnih matrica $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = A$, gdje je A_k matrica koja se iz A dobije tako da uzmemo njenih prvih k redaka i k stupaca. Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni mi nimum ako su sve minore Hesseove matrice $H_f(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H_f(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Minore koje su 0 tretiramo kao istovremeno pozitive i negativne: Ako time dobijemo redoslijed predznaka kao jedan od gore navedenih dvaju, onda je moguće da je S točka lokalnog ekstrema, ali je potrebno drugim metodama provjeriti radi li se stvarno o točki lokalnog ekstrema. U svim ostalim slučajevima govorimo o sedlastoj točki, tj. stacionarnoj točki koja nije točka ekstrema.

Zadatak

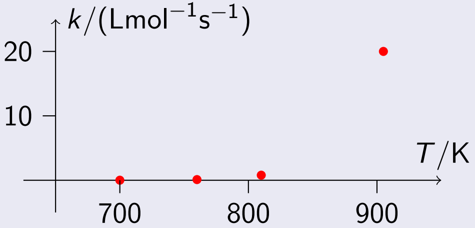
Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Metoda najmanjih kvadrata

Arrheniusova jednadžba

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{R\,T}\right)$$

T/K	k/(L/(mol s))
700	0,0110
760	0,105
810	0,789
910	20,0



Koliko iznose A i E_a za tu reakciju? Koliko iznosi k pri temperaturi 800 K?

Problem 1: Za dani niz parova brojeva (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (pretpostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 1: Za dani niz parova brojeva (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (pretpostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku s obzirom na zadane parove (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$?

Problem 1: Za dani niz parova brojeva (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (pretpostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku s obzirom na zadane parove (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$?

Ukupna greška aproksimacije:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \to \min$$

Problem 1: Za dani niz parova brojeva (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (pretpostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku s obzirom na zadane parove (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$?

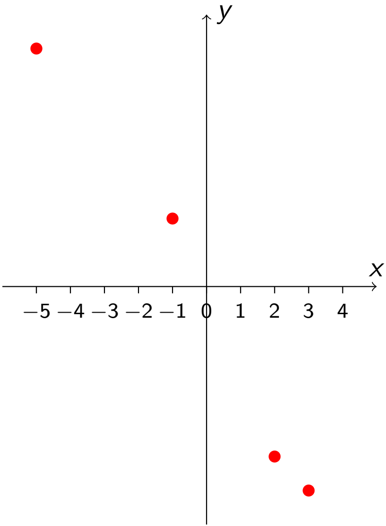
Ukupna greška aproksimacije:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \to \min$$

Problem 3: Ako smo pretpostavili vrstu funkcije f, s nepoznatim parametrima a, b, c, $\ldots$, kako minimizirati E?

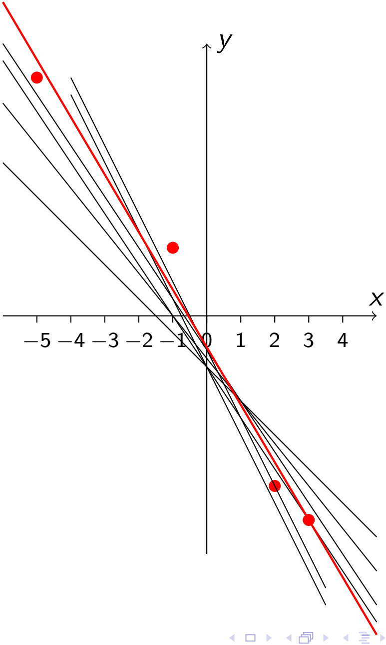
Zadatak

Odredite pravac koji najbolje aproksimira točke $(-5, 7)$, $(-1, 2)$, $(2, -5)$, $(3, -6)$.



Zadatak

Odredite pravac koji najbolje aproksimira točke $(-5, 7)$, $(-1, 2)$, $(2, -5)$, $(3, -6)$.



MNK: Aproksimacija afinom funkcijom

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

MNK: Aproksimacija afinom funkcijom

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a + 2\sum_{i=1}^{n} x_i b - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i a + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

MNK: Aproksimacija afinom funkcijom

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a + 2\sum_{i=1}^{n} x_i b - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i a + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

$$s_{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad s_x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \quad s_y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_{x^2} \cdot a + s_x \cdot b = s_{xy}$$

$$s_x \cdot a + n \cdot b = s_y$$

$$s_{x^2} \cdot a + s_x \cdot b = s_{xy}$$

$$s_x \cdot a + n \cdot b = s_y$$

$$a = \frac{n s_{xy} - s_x s_y}{n s_{x^2} - s_x^2}, \quad b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{n s_{x^2} - s_x^2}.$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$s_x =$	$s_y =$	$s_{x^2} =$	$s_{xy} =$

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem?

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem?

$$y = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}$$

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem?

$$y = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1{,}42857 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}50986$	$2{,}04082 \cdot 10^{-6}$	$-6{,}44266 \cdot 10^{-3}$
$1{,}31579 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}25379$	$1{,}73130 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}96552 \cdot 10^{-3}$
$1{,}23457 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}23699$	$1{,}52416 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}29258 \cdot 10^{-3}$
$1{,}09890 \cdot 10^{-3}$	$2{,}99573$	$1{,}20758 \cdot 10^{-6}$	$3{,}29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5{,}07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4{,}00482$	$s_{x^2} = 6{,}50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6{,}40875 \cdot 10^{-3}$

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem?

$$y = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1{,}42857 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}50986$	$2{,}04082 \cdot 10^{-6}$	$-6{,}44266 \cdot 10^{-3}$
$1{,}31579 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}25379$	$1{,}73130 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}96552 \cdot 10^{-3}$
$1{,}23457 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}23699$	$1{,}52416 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}29258 \cdot 10^{-3}$
$1{,}09890 \cdot 10^{-3}$	$2{,}99573$	$1{,}20758 \cdot 10^{-6}$	$3{,}29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5{,}07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4{,}00482$	$s_{x^2} = 6{,}50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6{,}40875 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta = n s_{x^2} - s_x^2 = 2{,}31082 \cdot 10^{-7},$$

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem?

$$y = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{\mathrm{L/(mol\,s)}}$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1{,}42857 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}50986$	$2{,}04082 \cdot 10^{-6}$	$-6{,}44266 \cdot 10^{-3}$
$1{,}31579 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}25379$	$1{,}73130 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}96552 \cdot 10^{-3}$
$1{,}23457 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}23699$	$1{,}52416 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}29258 \cdot 10^{-3}$
$1{,}09890 \cdot 10^{-3}$	$2{,}99573$	$1{,}20758 \cdot 10^{-6}$	$3{,}29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5{,}07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4{,}00482$	$s_{x^2} = 6{,}50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6{,}40875 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta = n s_{x^2} - s_x^2 = 2{,}31082 \cdot 10^{-7},$$

$$a = \frac{n s_{xy} - s_x s_y}{\Delta} = -22932{,}14036, \quad b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta} = 28{,}1101045$$

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem?

$$y = \ln \frac{A}{\mathrm{L}/(\mathrm{mol\,s})}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{\mathrm{L}/(\mathrm{mol\,s})}$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1{,}42857 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}50986$	$2{,}04082 \cdot 10^{-6}$	$-6{,}44266 \cdot 10^{-3}$
$1{,}31579 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}25379$	$1{,}73130 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}96552 \cdot 10^{-3}$
$1{,}23457 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}23699$	$1{,}52416 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}29258 \cdot 10^{-3}$
$1{,}09890 \cdot 10^{-3}$	$2{,}99573$	$1{,}20758 \cdot 10^{-6}$	$3{,}29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5{,}07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4{,}00482$	$s_{x^2} = 6{,}50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6{,}40875 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta = n s_{x^2} - s_x^2 = 2{,}31082 \cdot 10^{-7},$$

$$a = \frac{n s_{xy} - s_x s_y}{\Delta} = -22932{,}14036, \quad b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta} = 28{,}1101045$$

$$E_\mathrm{a} = -R\,a = 1{,}91 \cdot 10^5 \,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}, \quad A = 1{,}61 \cdot 10^{12} \,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol\,s}}$$

Zadatak

Tvrtka Hik među ostalim proizvodi krigle za pivo i uočila je da proizvodnja dobro prati teorijski model poznat kao Cobb-Douglasova funkcija: Ako ulože kapital od K € i L radnih sati svih osoba koje su radile u jednoj godini, godišnje će proizvesti N krigli piva, pri čemu je

$$N = c\, L^{\alpha}\, K^{1-\alpha}$$

za neke pozitivne konstante c i α. Pritom svake godine u proizvodnju krigli ulažu točno 40 k€. Podaci tvrtke Hik o uloženim radnim satima i proizvedenim kriglama iz posljednje četiri godine su:

Godina	L	N
2022.	161	2400
2023.	146	1790
2024.	194	2310
2025.	196	2180

Koristeći metodu najmanjih kvadrata izračunajte iznose konstanti c i α za proizvodnju krigli u tvrtci *Hik*. Koliko krigli piva će *Hik* proizvesti 2026. godine ako planira ponovno uložiti točno 40 k€ i ako se u proizvodnji krigli piva odradi ukupno 150 sati?

Koristeći metodu najmanjih kvadrata izračunajte iznose konstanti c i α za proizvodnju krigli u tvrtci *Hik*. Koliko krigli piva će *Hik* proizvesti 2026. godine ako planira ponovno uložiti točno 40 k€ i ako se u proizvodnji krigli piva odradi ukupno 150 sati?

$$\ln N = \ln c + \alpha \ln L + (1-\alpha) \ln K =$$

$$= \alpha(\ln L - \ln K) + \ln c + \ln K = \alpha(\ln L - \ln 40000) + \ln c + \ln 40000$$

$y = \ln N,\ x = \ln L - \ln 40000,\ a = \alpha,\ b = \ln c + \ln 40000$

Koristeći metodu najmanjih kvadrata izračunajte iznose konstanti c i α za proizvodnju krigli u tvrtci *Hik*. Koliko krigli piva će *Hik* proizvesti 2026. godine ako planira ponovno uložiti točno 40 k€ i ako se u proizvodnji krigli piva odradi ukupno 150 sati?

$$\ln N = \ln c + \alpha \ln L + (1-\alpha) \ln K =$$

$$= \alpha(\ln L - \ln K) + \ln c + \ln K = \alpha(\ln L - \ln 40000) + \ln c + \ln 40000$$

$y = \ln N,\ x = \ln L - \ln 40000,\ a = \alpha,\ b = \ln c + \ln 40000$

x	y	x^2	$x\,y$
-5.515230368	7.783224016	30.41776601	-42.92627346
-5.613028111	7.489970899	31.50608458	-42.04141721
-5.328776574	7.745002804	28.39585978	-41.27138951
-5.318520074	7.687080156	28.28665578	-40.88389012
-21.77555513	30.70527787	118.6063661	-167.1229703

$a = 0.528991388\ldots = \alpha,\ b = 10.5566\ldots$

Koristeći metodu najmanjih kvadrata izračunajte iznose konstanti c i α za proizvodnju krigli u tvrtci *Hik*. Koliko krigli piva će *Hik* proizvesti 2026. godine ako planira ponovno uložiti točno 40 k€ i ako se u proizvodnji krigli piva odradi ukupno 150 sati?

$$\ln N = \ln c + \alpha \ln L + (1-\alpha) \ln K =$$

$$= \alpha(\ln L - \ln K) + \ln c + \ln K = \alpha(\ln L - \ln 40000) + \ln c + \ln 40000$$

$y = \ln N,\ x = \ln L - \ln 40000,\ a = \alpha,\ b = \ln c + \ln 40000$

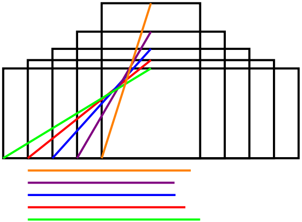
x	y	x^2	$x\,y$
−5.515230368	7.783224016	30.41776601	−42.92627346
−5.613028111	7.489970899	31.50608458	−42.04141721
−5.328776574	7.745002804	28.39585978	−41.27138951
−5.318520074	7.687080156	28.28665578	−40.88389012
−21.77555513	30.70527787	118.6063661	−167.1229703

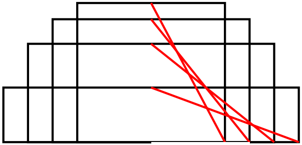
$a = 0.528991388\ldots = \alpha$, $b = 10.5566\ldots \Rightarrow c = 0.960757\ldots \Rightarrow$ uz 150 radnih sati u 2026. očekujemo proizvodnju $N = 2001.506\ldots$, dakle 2001 kriglu.

Uvjetni ekstremi

Keplerov problem bačve

Godine 1613., Johannes Kepler se u Linzu po drugi puta ženio. Za svadbu je nabavio bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina . . . Ako pretpostavimo da su bačve valjkastog oblika, koji je omjer promjera i duljine bačve koja uz istu cijenu ima najveći volumen? .





Zadatak

Riješite Keplerov problem bačve!

Problem uvjetnog ekstrema je zadatak određivanje minimuma ili maksimuma skarne funkcije $f(x, y, \ldots)$ uz jedan ili više uvjeta[1] oblika $g(x, y, \ldots) = 0$.
Jedna metoda rješavanja problema uvjetnog ekstrema je supstitucija iz uvjeta, sve dok ne eliminiramo sve uvjete i svedemo zadatak na određivanje lokalnog ekstrema funkcije s manje varijabli.
Drugačija metoda je metoda Lagrangeovih multiplikatora:
Lagrangeova funkcija problema uvjetnog ekstrema

$$f(x, y, \ldots) \to \min / \max$$

$$g(x, y, \ldots) = 0, \ldots$$

je

$$F(x, y, \ldots, \lambda, \ldots) = f(x, y, \ldots) - \lambda \cdot g(x, y, \ldots) - \ldots$$

[1] Uvjeti moraju biti takvi da je ∇g različit od nulvektora za sve točke koje zadovoljavaju uvjet.

Teorem

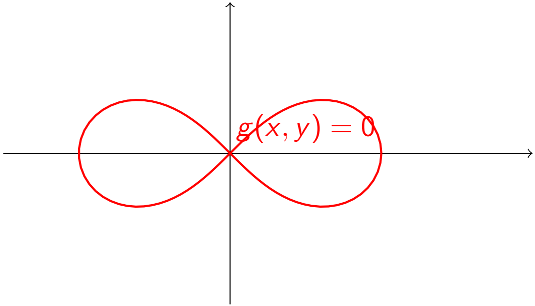
Ako problem uvjetnog ekstrema ima rješenje u nekoj točki $(x_0, y_0, \ldots)$, *onda postoje Lagrangeovi multiplikatori* $\lambda_0, \ldots$ *takvo da je* $(x_0, y_0, \ldots, \lambda_0, \ldots)$ *stacionarna točka za* F.

Teorem

Ako problem uvjetnog ekstrema ima rješenje u nekoj točki $(x_0, y_0, \ldots)$, onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda_0, \ldots$ takvo da je $(x_0, y_0, \ldots, \lambda_0, \ldots)$ stacionarna točka za F.

Zadatak

Riješite Keplerov problem bačve i ovom metodom!

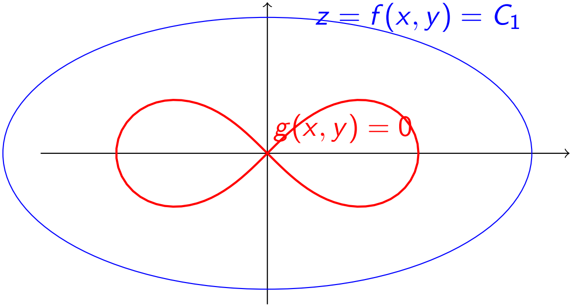


Teorem

Ako problem uvjetnog ekstrema ima rješenje u nekoj točki $(x_0, y_0, \ldots)$, onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda_0, \ldots$ takvo da je $(x_0, y_0, \ldots, \lambda_0, \ldots)$ stacionarna točka za F.

Zadatak

Riješite Keplerov problem bačve i ovom metodom!

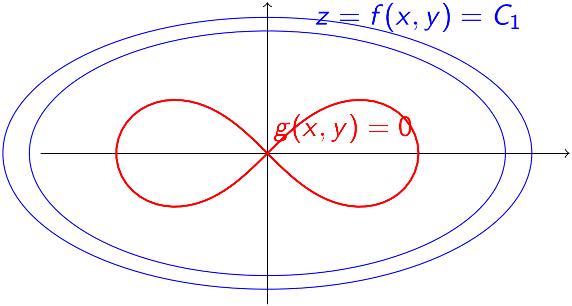


Teorem

Ako problem uvjetnog ekstrema ima rješenje u nekoj točki $(x_0, y_0, \ldots)$, onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda_0, \ldots$ takvo da je $(x_0, y_0, \ldots, \lambda_0, \ldots)$ stacionarna točka za F.

Zadatak

Riješite Keplerov problem bačve i ovom metodom!

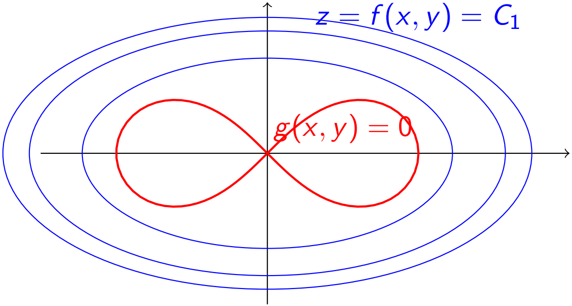


Teorem

Ako problem uvjetnog ekstrema ima rješenje u nekoj točki $(x_0, y_0, \ldots)$, onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda_0, \ldots$ takvo da je $(x_0, y_0, \ldots, \lambda_0, \ldots)$ stacionarna točka za F.

Zadatak

Riješite Keplerov problem bačve i ovom metodom!

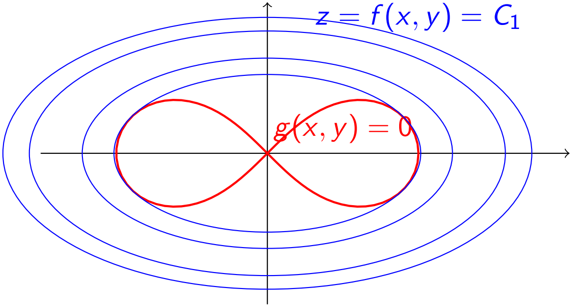


Teorem

Ako problem uvjetnog ekstrema ima rješenje u nekoj točki $(x_0, y_0, \ldots)$, onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda_0, \ldots$ takvo da je $(x_0, y_0, \ldots, \lambda_0, \ldots)$ stacionarna točka za F.

Zadatak

Riješite Keplerov problem bačve i ovom metodom!

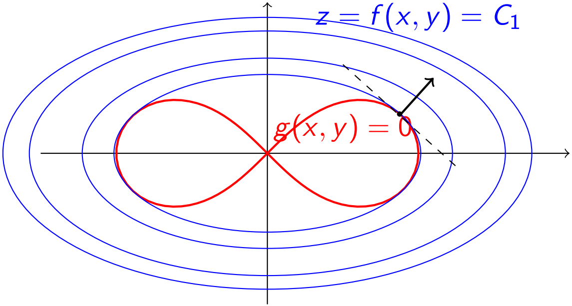


Teorem

Ako problem uvjetnog ekstrema ima rješenje u nekoj točki $(x_0, y_0, \ldots)$, onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda_0, \ldots$ takvo da je $(x_0, y_0, \ldots, \lambda_0, \ldots)$ stacionarna točka za F.

Zadatak

Riješite Keplerov problem bačve i ovom metodom!



Zadatak

Nađite maksimum funkcije $f(x, y, z) = x\, y^2\, z^3$ *uz uvjet* $x + y + z = 12$ *(unutar prvog oktanta koordinatnog sustava).*

Zadatak

Među svim ravninama nađite jednadžbu one ravnine koja prolazi kroz točku $(3, 2, 1)$ *(u Kartezijevom koordinatnom sustavu) takvu da je volumen tetraedra omeđenog s njome i koordinatnim ravninama najmanji mogući.*