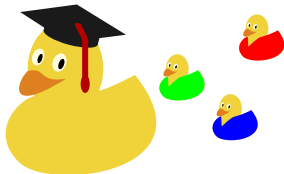


Krivulje. Osnove vektorske analize.

Franka Miriam Brückler



Vektorske funkcije

Vektorska funkcija je funkcija s više zavisnih varijabli, točnije funkcija kojoj je domena podskup od \mathbb{R}^n , a kodomena podskup od \mathbb{R}^m s $m > 1$.

Zadatak

Dajte primjer vektorske funkcije s 3 nezavisne i 2 zavisne varijable.

Vektorske funkcije

Vektorska funkcija je funkcija s više zavisnih varijabli, točnije funkcija kojoj je domena podskup od \mathbb{R}^n , a kodomena podskup od \mathbb{R}^m s $m > 1$.

Zadatak

Dajte primjer vektorske funkcije s 3 nezavisne i 2 zavisne varijable.

Vektorske funkcije s m zavisnih varijabli možemo opisati pomoću m skalarnih funkcija:

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_m(X)),$$

kraće $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$: Skalarnе funkcije F_1, F_2, \dots, F_m zovemo **koordinatnim funkcijama** vektorske funkcije F .

Zadatak

Koje su koordinatne funkcije vektorske funkcije iz prethodnog zadatka?

Krivulje

S kakvim smo se sve definicijama krivulja u ravnini susreli?

Krivulje

S kakvim smo se sve definicijama krivulja u ravnini susreli?

- **Krivulja** u \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) je slika neprekidne i po dijelovima derivabilne funkcije $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (odnosno, ta funkcija):
 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots)$.

Krivulje

S kakvim smo se sve definicijama krivulja u ravnini susreli?

- **Krivulja** u \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) je slika neprekidne i po dijelovima derivabilne funkcije $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (odnosno, ta funkcija):
 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots)$.
- $A = \gamma(a)$ je **početak krivulje**, a $B = \gamma(b)$ je **kraj krivulje** γ ; krivulja γ je zatvorena ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Krivulja je orijentirana od početka prema kraju.

Krivulje

S kakvim smo se sve definicijama krivulja u ravnini susreli?

- **Krivulja** u \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) je slika neprekidne i po dijelovima derivabilne funkcije $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (odnosno, ta funkcija):
 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots)$.
- $A = \gamma(a)$ je **početak krivulje**, a $B = \gamma(b)$ je **kraj krivulje** γ ; krivulja γ je zatvorena ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Krivulja je orijentirana od početka prema kraju.
- **Tangencijalni vektor** krivulje γ u točki $T = \gamma(t)$ je vektor derivacija njezinih koordinatnih funkcija u t :
 $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots)$.

Krivulje

S kakvim smo se sve definicijama krivulja u ravnini susreli?

- **Krivulja** u \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) je slika neprekidne i po dijelovima derivabilne funkcije $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (odnosno, ta funkcija):
 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots)$.
- $A = \gamma(a)$ je **početak krivulje**, a $B = \gamma(b)$ je **kraj krivulje** γ ; krivulja γ je zatvorena ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Krivulja je orijentirana od početka prema kraju.
- **Tangencijalni vektor** krivulje γ u točki $T = \gamma(t)$ je vektor derivacija njezinih koordinatnih funkcija u t :
 $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots)$.
- **Duljina krivulje** $l(\gamma)$ se definira kao integral norme tangencijalnog vektora za t od a do b .

Krivulje

S kakvim smo se sve definicijama krivulja u ravnini susreli?

- **Krivulja** u \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) je slika neprekidne i po dijelovima derivabilne funkcije $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (odnosno, ta funkcija):
 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots)$.
- $A = \gamma(a)$ je **početak krivulje**, a $B = \gamma(b)$ je **kraj krivulje** γ ; krivulja γ je zatvorena ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Krivulja je orijentirana od početka prema kraju.
- **Tangencijalni vektor** krivulje γ u točki $T = \gamma(t)$ je vektor derivacija njezinih koordinatnih funkcija u t :
 $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots)$.
- **Duljina krivulje** $l(\gamma)$ se definira kao integral norme tangencijalnog vektora za t od a do b .
- Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru, **normalna ravnina** u točki $T = \gamma(t)$ je ravnina kroz T čiji vektor normale je $\gamma'(t)$.

Zadatak

Je li krivulja zadana s $\gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$, $0 \leq t \leq 10\pi$ zatvorena? Izračunajte joj duljinu. Odredite joj tangencijalni vektor i normalnu ravninu u točki $\gamma(1/2)$.

Zadatak

Je li krivulja zadana s $\gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$, $0 \leq t \leq 10\pi$ zatvorena? Izračunajte joj duljinu. Odredite joj tangencijalni vektor i normalnu ravninu u točki $\gamma(1/2)$.

Krivulje se u termodinamici koriste za opisivanje (infinitezimalnih) procesa: točke u \mathbb{R}^n su stanja sustava (n -torke osnovnih svojstava: p , T , V , ...), termodinamički sustav je onda podskup Ω od \mathbb{R}^n , a procesi su krivulje u Ω .

Zadatak

Je li krivulja zadana s $\gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$, $0 \leq t \leq 10\pi$ zatvorena? Izračunajte joj duljinu. Odredite joj tangencijalni vektor i normalnu ravninu u točki $\gamma(1/2)$.

Krivulje se u termodinamici koriste za opisivanje (infinitezimalnih) procesa: točke u \mathbb{R}^n su stanja sustava (n -torke osnovnih svojstava: p , T , V , ...), termodinamički sustav je onda podskup Ω od \mathbb{R}^n , a procesi su krivulje u Ω .

Ako je $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ krivulja, krivulju **obrnute orijentacije** (ali iste slike funkcije) označavamo s $-\gamma$, a definirana je s

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

Zadatak

Obrnite orijentaciju zavojnice iz prethodnog zadatka.

Krivulja $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ nastala **spajanjem krivulja** $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (pri čemu je $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, tj. kraj prve krivulje je početak druge) je definirana s

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & c \leq t \leq d \end{cases}$$

Zadatak

Formulom opišite krivulju ABCA, gdje je $A = (-1, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (1, 1)$, dio AB je dužina, dio BC je četvrtina kružnice polumjera 1 sa središtem u $(1, 0)$, a dio CA je opet dužina.

Ako krivulju $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ komponiramo sa skalarnom funkcijom f od n varijabli (čija domena sadrži sliku od γ), razmatramo funkciju oblika

$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

Njena domena je I (iz kojeg uzimamo nezavisnu varijablu t), a budući da je f skalarna, kodomena joj je \mathbb{R} , tj. imamo $f \circ \gamma$ je realna funkcija jedne varijable. Za tu funkciju vrijedi sljedeći oblik **lančanog pravila**:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t).$$

Primjer

Neka je $f(x, y) = x^2 + y^3$ i $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tada je $f \circ \gamma(t) = \cos^2 t + \sin^3 t$, dakle

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = 2 \cos t \cdot (-\sin t) + 3 \sin^2 t \cdot \cos t. \text{ To je jednako}$$
$$2x \cdot (-\sin t) + 3y^2 \cdot \cos t = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t).$$

Osnove vektorske analize

Kako je definiran gradijent skalarne funkcije? Kako ga možemo shvatiti kao vektorsku funkciju koja ima istu domenu kao polazna skalarna funkcija?

Osnove vektorske analize

Kako je definiran gradijent skalarne funkcije? Kako ga možemo shvatiti kao vektorsku funkciju koja ima istu domenu kao polazna skalarna funkcija?

Vektorska polja su vektorske funkcije koje imaju jednako mnogo zavisnih i nezavisnih varijabli.

Osnove vektorske analize

Kako je definiran gradijent skalarne funkcije? Kako ga možemo shvatiti kao vektorsku funkciju koja ima istu domenu kao polazna skalarna funkcija?

Vektorska polja su vektorske funkcije koje imaju jednako mnogo zavisnih i nezavisnih varijabli.

Primjer

Za svaku skalarnu funkciju f je ∇f vektorsko polje.

Osnove vektorske analize

Kako je definiran gradijent skalarne funkcije? Kako ga možemo shvatiti kao vektorsku funkciju koja ima istu domenu kao polazna skalarna funkcija?

Vektorska polja su vektorske funkcije koje imaju jednako mnogo zavisnih i nezavisnih varijabli.

Primjer

Za svaku skalarnu funkciju f je ∇f vektorsko polje.

Vizualizacija vektorskih polja s 2 ili 3 varijable

Zadatak

Grafički prikažite *vektorsko polje* $F(x, y) = (x^2 - y^2 - 4, 2xy)$.

Ima li smisla govoriti o parcijalnim derivacijama vektorskih funkcija?

Ima li smisla govoriti o parcijalnim derivacijama vektorskih funkcija?

Jacobijeva matrica vektorske funkcije F je matrica

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(X) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) \right).$$

Kakve su Jacobijeve matrice vektorskih polja?

Ima li smisla govoriti o parcijalnim derivacijama vektorskih funkcija?

Jacobijeva matrica vektorske funkcije F je matrica

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(X) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) \right).$$

Kakve su Jacobijeve matrice vektorskih polja? **Jakobijan** je determinanta Jacobijeve matrice vektorskog polja.

Zadatak

Odredite Jacobijeve matrice i , ako imaju smisla, Jakobijane vektorskih funkcija iz zadatka s prvog i iz zadatka s prethodnog slide-a.

Ima li smisla govoriti o parcijalnim derivacijama vektorskih funkcija?

Jacobijeva matrica vektorske funkcije F je matrica

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(X) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) \right).$$

Kakve su Jacobijeve matrice vektorskih polja? **Jakobijan** je determinanta Jacobijeve matrice vektorskog polja.

Zadatak

Odredite Jacobijeve matrice i , ako imaju smisla, Jakobijane vektorskih funkcija iz zadatka s prvog i iz zadatka s prethodnog slide-a.

Svaka promjena koordinatnog sustava može se opisati pomoću jednog vektorskog polja:

Kartezijev i polarni koordinatni sustav u ravnini

$$KP = (r, \varphi) : (x, y) \xrightarrow{KP} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi +) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right),$$

$$PK = (x, y) : (r, \varphi) \xrightarrow{PK} (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Kartezijev i polarni koordinatni sustav u ravnini

$$KP = (r, \varphi) : (x, y) \xrightarrow{KP} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi +) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right),$$

$$PK = (x, y) : (r, \varphi) \xrightarrow{PK} (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Cilindrički koordinatni sustav

Kartezijev i polarni koordinatni sustav u ravnini

$$KP = (r, \varphi) : (x, y) \xrightarrow{KP} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi +) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right),$$

$$PK = (x, y) : (r, \varphi) \xrightarrow{PK} (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Cilindrički koordinatni sustav

$$KC = (r, \varphi, z) : (x, y, z) \xrightarrow{KC} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi +) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, z \right),$$

$$CK = (x, y, z) : (r, \varphi, z) \xrightarrow{CK} (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Kartezijev i polarni koordinatni sustav u ravnini

$$KP = (r, \varphi) : (x, y) \xrightarrow{KP} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi+) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right),$$

$$PK = (x, y) : (r, \varphi) \xrightarrow{PK} (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Cilindrički koordinatni sustav

$$KC = (r, \varphi, z) : (x, y, z) \xrightarrow{KC} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi+) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, z \right),$$

$$CK = (x, y, z) : (r, \varphi, z) \xrightarrow{CK} (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Sferni koordinatni sustav

$$KS = (r, \varphi, z) : (x, y, z) \xrightarrow{KS}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, (\pi+) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

$$SK = (x, y, z) : (r, \varphi, z) \xrightarrow{SK} (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta).$$

Kod kojih izračuna koordinatnih funkcija ovih vektorskih polja
trebamo biti oprezni?

Kod kojih izračuna koordinatnih funkcija ovih vektorskih polja trebamo biti oprezni? Koji su rasponi koordinata u svakom od spomenutih koordinatnih sustava?

Kod kojih izračuna koordinatnih funkcija ovih vektorskih polja trebamo biti oprezni? Koji su rasponi koordinata u svakom od spomenutih koordinatnih sustava? Što predstavljaju jednačbe tipa $\text{koordinata} = \text{const.}$ u svakom od spomenutih koordinatnih sustava?

Kod kojih izračuna koordinatnih funkcija ovih vektorskih polja trebamo biti oprezni? Koji su rasponi koordinata u svakom od spomenutih koordinatnih sustava? Što predstavljaju jednačbe tipa $\text{koordinata} = \text{const.}$ u svakom od spomenutih koordinatnih sustava?

Zadatak

Koje su sferne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, 0, -\sqrt{3})$? $(-1, -1, 0)$?

Kod kojih izračuna koordinatnih funkcija ovih vektorskih polja trebamo biti oprezni? Koji su rasponi koordinata u svakom od spomenutih koordinatnih sustava? Što predstavljaju jednačbe tipa $\text{koordinata} = \text{const.}$ u svakom od spomenutih koordinatnih sustava?

Zadatak

Koje su sferne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, 0, -\sqrt{3})$? $(-1, -1, 0)$? Koje su Kartezijeve koordinate točke koja u sfernom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, 120^\circ, 45^\circ)$? $(1, \pi, \frac{\pi}{2})$?

Kod kojih izračuna koordinatnih funkcija ovih vektorskih polja trebamo biti oprezni? Koji su rasponi koordinata u svakom od spomenutih koordinatnih sustava? Što predstavljaju jednačbe tipa koordinata = const. u svakom od spomenutih koordinatnih sustava?

Zadatak

Koje su sferne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, 0, -\sqrt{3})$? $(-1, -1, 0)$? Koje su Kartezijeve koordinate točke koja u sfernom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, 120^\circ, 45^\circ)$? $(1, \pi, \frac{\pi}{2})$?

Zadatak

Izračunajte Jakobijan od SK i KS.

Za promjene koordinata $Y = F(X)$ vrijedi da je Jacobijeva matrica od F^{-1} (izračunata u Y) jednaka inverznoj matrici Jacobijeve matrice od F (izračunate u X) \Rightarrow Jakobijani prijelaza iz polarnih, cilindričkih odnosno sfernih u Kartezijeve koordinate su recipročni onima za prijelaz iz Kartezijevih u polarne, cilindričke odnosno sferne.

Lančano pravilo za kompoziciju skalarne funkcije s općom vektorskom funkcijom:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)_{x_2, x_3, \dots} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial X}\right)_Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)_{x_1, x_3, \dots} \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial X}\right)_Z + \dots$$

Primjer

Za slučaj kompozicije skalarne funkcije dviju varijabli $f = f(x, y)$ s vektorskim poljem dviju varijabli $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Nabla-operator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Ako ∇ djeluje na skalarnu funkciju f , on joj pridružuje vektorsko polje — njezin gradijent:

$$\text{grad } f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{X}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{X}) \right).$$

Primjer

Potencijalna energija međudjelovanja dvaju naboja Q_1 i Q_2 udaljenih za r je $V = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Sila koja djeluje na drugi naboj uslijed postojanja prvog je

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Divergencija vektorskog polja F :

$$\operatorname{div} F(X) = \nabla \cdot F(X) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X).$$

Rotacija vektorskog polja $F = (F_x, F_y, F_z)$ triju varijabli:

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Zadatak

Odredite $\operatorname{div} F$ $\operatorname{rot} F$ za $F(x, y, z) = (y, z, x) = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$.

Divergencija vektorskog polja F :

$$\operatorname{div} F(X) = \nabla \cdot F(X) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X).$$

Rotacija vektorskog polja $F = (F_x, F_y, F_z)$ triju varijabli:

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Zadatak

Odredite $\operatorname{div} F$ $\operatorname{rot} F$ za $F(x, y, z) = (y, z, x) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

Koje od sljedećih „stvari” su smislene: grad grad, grad div, grad rot, div grad, div div, div rot, rot grad, rot div, rot rot?

Divergencija vektorskog polja F :

$$\operatorname{div} F(X) = \nabla \cdot F(X) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X).$$

Rotacija vektorskog polja $F = (F_x, F_y, F_z)$ triju varijabli:

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Zadatak

Odredite $\operatorname{div} F$ $\operatorname{rot} F$ za $F(x, y, z) = (y, z, x) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

Koje od sljedećih „stvari” su smislene: grad grad, grad div, grad rot, div grad, div div, div rot, rot grad, rot div, rot rot?

- **Rotacija gradijenta** skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla \times (\nabla f) = \text{rot grad } f = [0, 0, 0].$$

- **Rotacija gradijenta** skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla \times (\nabla f) = \text{rot grad} f = [0, 0, 0].$$

- **Divergencija rotacije** vektorskog polja s tri varijable je nul-funkcija:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \text{div rot} F = 0$$

- **Rotacija gradijenta** skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla \times (\nabla f) = \text{rot grad } f = [0, 0, 0].$$

- **Divergencija rotacije** vektorskog polja s tri varijable je nul-funkcija:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \text{div rot } F = 0$$

- **Divergencija gradijenta** skalarne funkcije naziva se **Laplaceovim operatorom**:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Zadatak

Dokažite da je $f(x, y, z) = A \sin(ax) \sin(by) \sin(cz)$ svojstveni vektor Laplaceovog operatora. Kojoj svojstvenoj vrijednosti odgovara?

Gradijent svake skalarne funkcije je vektorsko polje — je li svako vektorsko polje gradijent neke skalarne funkcije?

Zadatak

Je li $F(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - xy)$ gradijent neke skalarne funkcije?

Gradijent svake skalarne funkcije je vektorsko polje — je li svako vektorsko polje gradijent neke skalarne funkcije?

Zadatak

Je li $F(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - xy)$ gradijent neke skalarne funkcije?

Vektorsko polje F je **konzervativno vektorsko polje** ako postoji skalarna funkcija f takva da je $F = \nabla f$. Tada f nazivamo **potencijalom** od F .

Zadatak

Dokažite da ako je F konzervativno, onda ono zadovoljava **Eulerov uvjet**, tj. da mu je Jacobijeva matrica simetrična.

Općenito, ako F zadovoljava Eulerov uvjet ono ne mora biti konzervativno, ali će biti takov ako mu je domena primjerice oblika $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \dots$ ili otvorena kugla.

Zadatak

Je li $F(x, y) = (2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y)$ konzervativno vektorsko polje? Ako da, odredite mu potencijal!

Zadatak

Ako je F konzervativno vektorsko polje s tri varijable, što je $\text{rot } F$?